

**Marek Balcerzak**

**KILKA WYKŁADÓW  
O FUNKCJACH RZECZYWISTYCH**

$$u_n(y) - u_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{gdy } x_n < x \text{ lub } x_n > y \\ f(x_{n+}) - f(x_n) & \text{gdy } x_n = x \\ f(x_{n+}) - f(x_{n-}) & \text{gdy } x < x_n < y \\ f(x_n) - f(x_{n-}) & \text{gdy } x_n = y. \end{cases}$$

**Politechnika Łódzka  
Łódź 2019**

**Marek Balcerzak**

**KILKA WYKŁADÓW  
O FUNKCJACH RZECZYWISTYCH**

**Politechnika Łódzka  
Łódź 2019**

Recenzent  
**prof. dr hab. Tomasz Natkaniec**

Redaktor Naukowy Wydziału Fizyki Technicznej,  
Informatyki i Matematyki Stosowanej  
**dr hab. inż Aneta Poniszewska-Marańda**

© Copyright by Politechnika Łódzka 2019

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223  
tel. 42 631-29-52, 42 631-20-87  
fax 42 631-25-38  
e-mail: [zamowienia@info.p.lodz.pl](mailto:zamowienia@info.p.lodz.pl)  
[www.wydawnictwo.p.lodz.pl](http://www.wydawnictwo.p.lodz.pl)

**ISBN 978-83-66287-18-1**

**DOI:10.34658/9788366287181**

**<https://doi.org/10.34658/9788366287181>**

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>5</b>
<b>1 Funkcje monotoniczne</b>	<b>7</b>
1.1 Podstawowe własności . . . . .	7
1.2 Twierdzenie Helly’ego . . . . .	11
<b>2 Funkcje o wahanu skończonym</b>	<b>15</b>
2.1 Wahanie funkcji. Podstawowe własności . . . . .	15
2.2 Rozkład Jordana i jego konsekwencje . . . . .	20
<b>3 Całka Riemanna-Stieltjesa</b>	<b>23</b>
3.1 Definicja całki. Podstawowe własności . . . . .	23
3.2 Kiedy RS-całka istnieje? . . . . .	27
<b>4 Twierdzenie Vitalego o pokryciu</b>	<b>33</b>
4.1 Twierdzenie Vitalego . . . . .	33
4.2 Różniczkowalność funkcji monotonicznych . . . . .	35
<b>5 Funkcje absolutnie ciągłe</b>	<b>41</b>
5.1 Definicja, podstawowe własności . . . . .	41
5.2 Twierdzenie Banacha-Zareckiego . . . . .	45
<b>6 Funkcje pierwszej klasy Baire’a</b>	<b>49</b>
6.1 Definicja, przykłady, podstawowe własności . . . . .	49
6.2 Charakteryzacja Lebesgue’a . . . . .	52
<b>7 Zestaw zadań</b>	<b>57</b>
7.1 Wahanie funkcji . . . . .	57
7.2 Całka Riemanna-Stieltjesa . . . . .	58

7.3	Pokrycie Vitalego. Różniczkowalność . . . . .	59
7.4	Funkcje pierwszej klasy Baire'a . . . . .	60
	<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>

# Wstęp

Podstawy teorii funkcji rzeczywistych znajdują liczne zastosowania w innych działach matematyki. Na przykład funkcje o wahanu skończonym na przedziale  $[a, b]$  stanowią ciekawą i ważną algebrę Banacha. Całka Riemanna-Stieltjesa ma istotne zastosowania w probabilistyce i w równaniach różniczkowych. Funkcjom monotonicznym i funkcjom o wahanu skończonym są poświęcone dwa pierwsze rozdziały skryptu, a kolejny rozdział dotyczy najważniejszych własności całki Riemanna-Stieltjesa.

Klasyczne twierdzenie Vitaliego o pokryciu jest ważnym narzędziem w teorii funkcji odwołującym się do miary Lebesgue'a na prostej. Z jego pomocą dowodzi się, że funkcja monotoniczna na przedziale jest różniczkowalna prawie wszędzie. Ten materiał został wyłożony w rozdziale 4.

Absolutnie ciągłość funkcji jest fundamentalnym pojęciem z punktu widzenia całki Lebesgue'a. Tę klasę funkcji omówiono w rozdziale 5, zamieszczając ich elegancką charakteryzację pochodzącą od Banacha i Zareckiego. Geneza funkcji pierwszej klasy Baire'a wywodzi się z początków tzw. deskryptywnej teorii mnogości. Te funkcje rozpatrywane w różnych ujęciach nadal są interesujące z punktu widzenia topologii i analizy funkcjonalnej. Zostały one omówione w rozdziale 6, gdzie przedstawiono m.in. klasyczną charakteryzację Lebesgue'a wyrażoną w języku przeciwobrazów półprostych.

Ostatni rozdział 7 zawiera zestaw zadań ilustrujących rozważania teoretyczne z poprzednich rozdziałów.



# Rozdział 1

## Funkcje monotoniczne

### 1.1 Podstawowe własności

Niech  $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $Z \subset \mathbb{R}$ . Przypomnijmy, że funkcja  $f$  nazywa się *monotoniczna* na  $Z$ , gdy jest niemalejąca lub nierosnąca.

Granice lewostronną (prawostronną) funkcji  $f$  w lewostronnym (prawostronnym) punkcie skupienia  $x_0$  zbioru  $Z$  oznaczamy przez  $f(x_0-)$  (odpowiednio,  $f(x_0+)$ ) lub tradycyjnie przez  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  (odpowiednio,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ).

**Twierdzenie 1.1.** *Niech  $Z \subset \mathbb{R}$  oraz  $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ .*

(1) *Załóżmy, że funkcja  $f$  jest niemalejąca.*

(a) *Jeśli  $x_0$  jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $Z$ , to*

$$f(x_0-) = \sup f[Z \cap (-\infty, x_0)].$$

*Jeśli ponadto  $x_0 \in Z$ , to  $f(x_0-) \leq f(x_0)$ .*

(b) *Jeśli  $x_0$  jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $Z$ , to*

$$f(x_0+) = \inf f[Z \cap (x_0, \infty)].$$

*Jeśli ponadto  $x_0 \in Z$ , to  $f(x_0) \leq f(x_0+)$ .*

(2) *Załóżmy, że funkcja  $f$  jest nierosnąca.*

(a) *Jeśli  $x_0$  jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $Z$ , to*

$$f(x_0-) = \inf f[Z \cap (-\infty, x_0)].$$

*Jeśli ponadto  $x_0 \in Z$ , to  $f(x_0) \leq f(x_0-)$ .*



(b) Jeśli  $x_0$  jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $Z$ , to

$$f(x_0+) = \sup f[Z \cap (x_0, \infty)].$$

Jeśli ponadto  $x_0 \in Z$ , to  $f(x_0+) \leq f(x_0)$ .

*Dowód.* Wykażemy (1)(a). Dowody pozostałych własności są analogiczne. Niech  $S := \sup f[Z \cap (-\infty, x_0)]$ .

Założmy, że  $S < \infty$ . Niech  $\varepsilon > 0$ . Z definicji supremum istnieje  $x_1 \in Z$  taki, że  $x_1 < x_0$  oraz  $f(x_1) > S - \varepsilon$ . Niech  $\delta := x_0 - x_1$ . Wtedy  $x_0 - \delta = x_1$  oraz z monotoniczności  $f$  mamy

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) \geq f(x_1) > S - \varepsilon. \quad (1.1)$$

Ponadto oczywiście

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) \leq S < S + \varepsilon. \quad (1.2)$$

Z (1.1) i (1.2) otrzymujemy

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad |f(x) - S| < \varepsilon,$$

co daje  $f(x_0-) = S$ .

Niech teraz  $S = \infty$ . Wtedy dla każdego  $M > 0$  dobierzmy  $x_M \in Z$  tak, że  $x_M < x_0$  oraz  $f(x_M) > M$ . Niech  $\delta := x_0 - x_M$ . Wtedy  $x_0 - \delta = x_M$  i dla każdego  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  mamy  $f(x) \geq f(x_M) > M$ , co oznacza, że  $f(x_0-) = \infty = S$ .

Niech  $x_0 \in Z$ . Mamy  $f(x) \leq f(x_0)$  dla każdego  $x \in Z$ ,  $x < x_0$ . Stąd

$$\sup f[Z \cap (-\infty, x_0)] \leq f(x_0),$$

a więc z poprzedniej części tezy  $f(x_0-) \leq f(x_0)$ . □

**Wniosek 1.1.** Niech  $Z \subset \mathbb{R}$  oraz niech funkcja  $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$  będzie niemalejąca [nierosnąca]. Jeśli  $x, y \in Z$ ,  $x < y$  oraz  $x, y$  są obustronnymi punktami skupienia zbioru  $Z$ , to

$$f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) \leq f(y-) \leq f(y) \leq f(y+)$$

$$[\text{odpow. } f(x-) \geq f(x) \geq f(x+) \geq f(y-) \geq f(y) \geq f(y+)].$$

*Dowód.* Założmy, że  $f$  jest niemalejąca. Wykażemy, że  $f(x+) \leq f(y-)$ , bo pozostałe nierówności wynikają z Twierdzenia 1.1.

Niech  $c$  oznacza środek przedziału  $(x, y)$ . Wtedy dla dowolnych  $t \in (x, c) \cap Z$  oraz  $s \in (c, y) \cap Z$  mamy  $f(t) \leq f(s)$ . Zatem  $\inf_{t \in (x, c) \cap Z} f(t) \leq f(s)$  dla każdego  $s \in (c, y) \cap Z$ . Stąd  $\inf_{t \in (x, c) \cap Z} f(t) \leq \sup_{s \in (c, y) \cap Z} f(s)$ . Ale

$$\inf_{t \in (x, c) \cap Z} f(t) \geq \inf_{t \in Z \cap (-\infty, x)} f(t) = f(x+) \quad \text{oraz} \quad \sup_{s \in (c, y) \cap Z} f(s) \leq \sup_{s \in Z \cap (y, \infty)} f(s) = f(y-)$$

na mocy Twierdzenia 1.1. Stąd  $f(x+) \leq f(y-)$ .  $\square$

**Wniosek 1.2.** Niech  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  (gdzie  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ) będzie funkcją monotoniczną i niech  $(x_n)$  będzie ciągiem (skończonym lub nieskończonym) różnych liczb z przedziału  $(a, b)$ . Wtedy

$$\sum_n |f(x_n+) - f(x_n-)| \leq |f(b-) - f(a+)|.$$

*Dowód.* Jeśli choć jedna spośród granic  $f(b-)$ ,  $f(a+)$  jest nieskończona, to teza jest oczywista. Niech więc obie te granice będą skończone.

Założmy, że  $f$  jest niemalejąca. Niech na początek  $(x_n)_{n \leq m}$  będzie ciągiem skończonym różnych liczb przedziału  $(a, b)$ . Przenumerujmy go tak, by  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$ . Na mocy Wniosku 1.1 mamy

$$f(a+) \leq f(x_1-) \leq f(x_1+) \leq \dots \leq f(x_m-) \leq f(x_m+) < f(b-).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m (f(x_n+) - f(x_n-)) &\leq (f(x_1-) - f(a+)) + (f(x_1+) - f(x_1-)) + (f(x_2-) - f(x_1+)) + \dots \\ &+ (f(x_m-) - f(x_{m-1}+)) + (f(x_m+) - f(x_m-)) + (f(b-) - f(x_m+)) \\ &= f(b-) - f(a+). \end{aligned}$$

To daje tezę.

Gdy ciąg  $(x_n)$  jest nieskończony, bierzemy ciąg złożony z jego pierwszych  $m$  wyrazów i dostajemy powyższe oszacowanie. Z dowolności  $m$  oszacowanie to zachowuje się dla ciągu nieskończonego przez przejście do granicy, gdy  $m \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Twierdzenie 1.2.** Funkcja monotoniczna na przedziale ma przeliczalny zbiór punktów nieciągłości.

*Dowód.* Możemy założyć, że  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest np. niemalejąca. Oznaczmy przez  $D$  zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f$ . Korzystając z Twierdzenia 1.1 wnioskujemy, że  $x \in D$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(x-) < f(x+)$ . Dla każdego  $x \in D$  wybierzmy  $w_x \in \mathbb{Q}$  tak, by  $f(x-) < w_x < f(x+)$ . Określmy funkcję  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{Q}$  wzorem  $\varphi(x) := w_x$ . Wówczas  $\varphi$  jest iniekcją. Istotnie, niech  $x, y \in D$ ,  $x \neq y$  i niech np.  $x < y$ . Z Wniosku 1.1 mamy

$$f(x-) < w_x < f(x+) \leq f(y-) < w_y < f(y+).$$

Stąd  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ . Z różnowartościowości  $\varphi$  wynika, że  $D$  jest równoliczny z podzbiorem zbioru  $\mathbb{Q}$ . Zatem  $D$  jest przeliczalny.  $\square$

**Twierdzenie 1.3.** Każdą funkcję niemalejącą [nierosnącą]  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  można przedstawić w postaci sumy  $f = g + s$ , gdzie  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją niemalejącą [nierosnącą] ciągłą oraz  $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest tzw. funkcją skoków, tzn.  $s = \sum_n u_n$ , gdzie funkcje  $u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dane są wzorami

$$u_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_n \\ f(x_n) - f(x_n-) & \text{dla } x = x_n \\ f(x_n+) - f(x_n-) & \text{dla } x > x_n. \end{cases}$$

oraz  $(x_n)$  jest ciągiem różnowartościowym wszystkich punktów nieciągłości funkcji  $f$  (jeśli  $x_n = a$  lub  $x_n = b$ , to przyjmujemy  $f(a-) := f(a)$  lub  $f(b+) := f(b)$ ).

*Dowód.* Załóżmy, że  $f$  jest niemalejąca. (Gdy  $f$  jest nierosnąca, dowód jest podobny.) Zauważmy, że (w przypadku nieskończenie wielu składników) szereg  $\sum u_n$  jest jednostajnie zbieżny na  $[a, b]$ . Istotnie, mamy

$$\forall x \in [a, b] \quad |u_n(x)| \leq f(x_n+) - f(x_n-),$$

więc wystarczy zastosować kryterium Weierstrassa, gdyż z Wniosku 1.2 wynika, że szereg liczbowy  $\sum (f(x_n+) - f(x_n-))$  jest zbieżny. Tym samym funkcja  $s := \sum_n u_n$  jest poprawnie określona. (Zauważmy, że funkcja  $s$  jest niemalejąca jako suma szeregu funkcji niemalejących. Gdy ciąg  $(x_n) = (x_n)_{n \leq m}$  jest skończony, możemy przyjąć  $u_n := 0$  dla  $n > m$ .)

Położmy  $g(x) := f(x) - s(x)$  dla  $x \in [a, b]$ . Zatem równość  $f = g + s$  zachodzi.

Pokażemy, że funkcja  $g$  jest ciągła w dowolnym punkcie  $\bar{x} \in [a, b]$ . Rozważmy dwa przypadki.

1<sup>o</sup>  $\bar{x}$  jest punktem ciągłości funkcji  $f$ . Wtedy wszystkie funkcje  $u_n$  są ciągłe w  $\bar{x}$ , więc funkcja  $s$  też jest ciągła w  $\bar{x}$  wobec jednostajnej zbieżności szeregu. Zatem funkcja  $g$  jest ciągła w  $\bar{x}$  jako różnica dwóch funkcji ciągłych w tym punkcie.

2<sup>o</sup>  $\bar{x} = x_{n_0}$  dla pewnego  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Mamy

$$g = f - s = f - u_{n_0} - \sum_{n \neq n_0} u_n. \quad (1.3)$$

Funkcja  $\sum_{n \neq n_0} u_n$  jest ciągła w  $\bar{x}$ , bo wszystkie funkcje tego szeregu są ciągłe w  $\bar{x}$ , a szereg jest jednostajnie zbieżny. Na mocy (1.3) wystarczy pokazać, że funkcja  $h := f - u_{n_0}$  jest ciągła w  $\bar{x}$ . To zaś wynika z poniższych równości:

$$h(\bar{x}+) = f(\bar{x}+) - u_{n_0}(\bar{x}+) = f(\bar{x}+) - f(\bar{x}+) + f(\bar{x}-) = f(\bar{x}-)$$

$$h(\bar{x}) = f(\bar{x}) - u_{n_0}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) + f(\bar{x}-) = f(\bar{x}-)$$

$$h(\bar{x}-) = f(\bar{x}-) - u_{n_0}(\bar{x}-) = f(\bar{x}-).$$

Pozostaje do sprawdzenia, że  $g$  jest niemalejąca. Niech więc  $a \leq x < y \leq b$ . Dla ustalonego  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$u_n(y) - u_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{gdy } x_n < x \text{ lub } x_n > y \\ f(x_{n+}) - f(x_n) & \text{gdy } x_n = x \\ f(x_{n+}) - f(x_{n-}) & \text{gdy } x < x_n < y \\ f(x_n) - f(x_{n-}) & \text{gdy } x_n = y. \end{cases}$$

Co najwyżej jeden składnik sumy  $\sum_i (u_i(y) - u_i(x))$  jest taki, że  $y = x_n$  (wtedy ten składnik jest równy  $f(y) - f(y-)$ ). Podobnie co najwyżej jeden składnik sumy  $\sum_i (u_i(y) - u_i(x))$  jest taki, że  $x = x_n$  (wtedy ten składnik jest równy  $f(x+) - f(x)$ ). Pozostałe niezerowe wyrazy tej sumy są postaci  $f(x_i+) - f(x_i-)$ .

Stąd, korzystając z powyższego przedstawienia  $u_n(y) - u_n(x)$  oraz Wniosku 1.2, otrzymujemy

$$\begin{aligned} s(y) - s(x) &= \sum_n (u_n(y) - u_n(x)) \\ &\leq f(x+) - f(x) + \sum_{x < x_n < y} (u_n(y) - u_n(x)) + f(y) - f(y-) \\ &= f(x+) - f(x) + \sum_{x < x_n < y} (f(x_{n+}) - f(x_{n-})) + f(y) - f(y-) \\ &\leq f(x+) - f(x) + f(y-) - f(x+) + f(y) - f(y-) = f(y) - f(x). \end{aligned}$$

Zatem  $g(y) - g(x) = f(y) - f(x) - (s(y) - s(x)) \geq 0$ . □

## 1.2 Twierdzenie Helly'ego

Wykażmy następujący prosty lemat o przedłużaniu funkcji monotonicznej.

**Lemat 1.1** (o przedłużaniu). *Niech  $Z \subset \mathbb{R}$  będzie niepustym zbiorem ograniczonym. Jeśli funkcja  $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$  jest niemalejąca (nierosnąca) oraz  $a := \inf Z$ ,  $b := \sup Z$ , przy czym  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $Z$ , to istnieje funkcja niemalejąca (nierosnąca)  $\bar{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że  $\bar{f}(x) = f(x)$  dla  $x \in Z \cap (a, b)$ .*

*Dowód.* Niech  $f$  będzie niemalejąca. Połóżmy  $\bar{f}(x) := \sup_{t \in (a, x] \cap Z} f(t)$  dla  $x \in (a, b)$ . Jeśli  $x \in Z \cap (a, b)$ , to  $\sup_{t \in (a, x] \cap Z} f(t) = f(x)$ , więc  $\bar{f}(x) = f(x)$ .

Niech  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $x_1 < x_2$ . Wtedy  $(a, x_1] \cap Z \subset (a, x_2] \cap Z$ , zatem z własności supremum mamy

$$\bar{f}(x_1) = \sup_{t \in (a, x_1] \cap Z} f(t) \leq \sup_{t \in (a, x_2] \cap Z} f(t) = \bar{f}(x_2).$$

Wobec tego funkcja  $\bar{f}$  jest niemalejąca na  $(a, b)$ .

Jeśli  $f$  jest nierosnąca, to przyjmujemy  $\bar{f}(x) := \inf_{t \in (a, x] \cap Z} f(t)$  dla  $x \in (a, b)$  i dowód jest podobny.  $\square$

Omówimy teraz metodę przekątniową wyboru podciągu.

**Lemat 1.2** (lemat przekątniowy). *Niech dany będzie ciąg ciągów liczbowych ograniczonych*

$$(y_n^{(1)}), (y_n^{(2)}), \dots$$

*Wtedy istnieje rosnący ciąg  $(k_n)$  indeksów naturalnych taki, że podciągi  $(y_{k_n}^{(1)}), (y_{k_n}^{(2)}), \dots$  są zbieżne.*

*Dowód.* Najpierw korzystając z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, wybieramy z ciągu  $(y_n^{(1)})$  podciąg zbieżny  $(y_{j_n^{(1)}}^{(1)})$ . Następnie z ciągu  $(y_{j_n^{(1)}}^{(2)})$  wybieramy podciąg zbieżny  $(y_{j_n^{(2)}}^{(2)})$ . Postępując indukcyjnie, wybieramy z ciągu  $(y_{j_n^{(m)}}^{(m+1)})$  podciąg zbieżny  $(y_{j_n^{(m+1)}}^{(m+1)})$  dla każdego  $m \in \mathbb{N}$ .

Niech  $k_n := j_n^{(n)}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$k_n = j_n^{(n)} < j_{n+1}^{(n)} \leq j_{n+1}^{(n+1)} = k_{n+1}.$$

Zatem  $(k_n)$  jest rosnącym ciągiem wskaźników naturalnych.

Dla każdego  $m \in \mathbb{N}$  ciąg  $(y_{k_n}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}} = (y_{j_n^{(m)}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  począwszy od indeksów  $n \geq m$ , jest podciągiem ciągu zbieżnego  $(y_{j_n^{(m)}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ , zatem jest zbieżny.  $\square$

Następujący wniosek jest przeformulowaniem powyższego lematu.

**Wniosek 1.3.** *Niech  $(f_n)$  będzie ciągiem funkcji  $f_n: Z \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdzie  $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$  jest nieskończonym zbiorem przeliczalnym. Jeśli dla każdego  $j \in \mathbb{N}$  ciąg  $(f_n(z_j))_{n \in \mathbb{N}}$  jest ograniczony, to można wybrać podciąg  $(f_{k_n})$  ciągu  $(f_n)$  zbieżny w każdym punkcie zbioru  $Z$ .*

*Dowód.* Należy zastosować lemat przekątniowy dla  $(y_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}} := (f_n(z_j))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Twierdzenie 1.4** (Helly'ego). *Niech będzie dany ciąg  $(f_n)$  funkcji  $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  niemających (nierosnących) taki, że dla każdego  $x \in (a, b)$  ciąg  $(f_n(x))$  jest ograniczony. Wtedy z ciągu  $(f_n)$  można wybrać podciąg zbieżny punktowo na  $(a, b)$ .*

*Dowód.* Załóżmy np., że funkcje  $f_n$  rozważanego ciągu są niemające. Niech  $Z \subset (a, b)$  będzie zbiorem przeliczalnym gęstym w  $(a, b)$ , np. weźmy  $Z := \mathbb{Q} \cap (a, b)$ . Na mocy założenia o ograniczoności ciągu  $(f_n(x))$  w każdym punkcie  $x \in Z$  możemy zastosować

Wniosek 1.3 i wybrać podciąg  $(f_{k_n})$  zbieżny w każdym punkcie  $x \in Z$ . Niech  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x)$  dla  $x \in Z$ . Wtedy funkcja  $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$  jest niemalejąca. Na mocy Lematu 1.1 istnieje funkcja niemalejąca  $\bar{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że  $\bar{f}|_Z = f$ .

Niech  $x \in (a, b)$ . Z gęstości zbioru  $Z$  wynika, że istnieją ciągi  $(u_m), (v_m)$  punktów zbioru  $Z$  takie, że

$$u_m < x < v_m \text{ dla wszystkich } m \in \mathbb{N}, \quad u_m \rightarrow x, \quad v_m \rightarrow x.$$

Ustalmy  $m \in \mathbb{N}$ . Ponieważ każda funkcja  $f_{k_n}$  jest niemalejąca, więc

$$f_{k_n}(u_m) \leq f_{k_n}(x) \leq f_{k_n}(v_m) \text{ dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd dla  $n \rightarrow \infty$  mamy

$$\bar{f}(u_m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \bar{f}(v_m).$$

Korzystając z dowolności  $m \in \mathbb{N}$ , przejdźmy do granicy gdy  $m \rightarrow \infty$  i wtedy otrzymamy

$$\bar{f}(x-) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \bar{f}(x+) \quad (1.4)$$

(stosujemy tu Twierdzenie 1.1 o istnieniu granic jednostronnych funkcji monotonicznej).

Niech  $D$  oznacza zbiór punktów nieciągłości funkcji  $\bar{f}$ . Jeśli  $x \in (a, b) \setminus D$ , to  $\bar{f}(x-) = \bar{f}(x+)$ , więc z (1.4) wynika, że granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x)$  istnieje.

Wiemy z Twierdzenia 1.2, że zbiór  $D$  jest przeliczalny. Stosując Wniosek 1.3 do ciągu  $(f_{k_n})$  i zbioru  $D$ , otrzymujemy kolejny podciąg  $(f_{j_{k_n}})$  zbieżny w każdym punkcie zbioru  $D$ . Oczywiście ciąg ten pozostaje zbieżny w każdym punkcie zbioru  $(a, b) \setminus D$ . Zatem teza została wykazana.  $\square$

Z twierdzenia Helly'ego wynika, że zachodzi także jego wersja dla ciągu funkcji monotonicznych określonych na przedziale domkniętym  $[a, b]$  lub jednostronnie domkniętym. Istotnie, należy zastosować powyższe twierdzenie dla funkcji rozważanych na  $(a, b)$  i wybrać dodatkowo podciąg zbieżny w obu lub jednym z punktów  $a, b$ .

**Twierdzenie 1.5.** *Niech dany będzie ciąg  $(f_n)$  funkcji rzeczywistych niemalejących (nierosnących) na  $[a, b]$  oraz niech funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Załóżmy, że zbiór  $Z$  jest gęsty w  $[a, b]$  i taki, że  $a, b \in Z$ . Jeśli  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  dla każdego  $x \in Z$ , to ciąg  $(f_n)$  jest jednostajnie zbieżny na  $[a, b]$  do funkcji  $f$ .*

*Dowód.* Niech  $\varepsilon > 0$ . Funkcja ciągła  $f$  na przedziale  $[a, b]$  jest tam jednostajnie ciągła, więc istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że

$$\forall s, t \in [a, b] (|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon/2).$$

Korzystając z gęstości zbioru  $Z$ , można dobrać podział  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$  taki, żeby  $x_i \in Z$  oraz  $x_i - x_{i-1} < \delta$  dla  $i = 1, \dots, p$ . Wtedy

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon/2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, p. \quad (1.5)$$

Ponieważ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_i) = f(x_i)$  dla  $i = 1, \dots, p$ , więc dobierzmy liczbę  $k \in \mathbb{N}$  tak, żeby

$$\forall n \geq k \quad \forall i \in \{0, \dots, p\} \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/4. \quad (1.6)$$

Założmy, że funkcje  $f_n$  są niemalejące i ustalmy  $x \in [a, b]$ . Istnieje indeks  $i \in \{1, \dots, p\}$  taki, że  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ . Wtedy na mocy (1.6) mamy

$$\forall n \geq k \quad f(x_{i-1}) - \varepsilon/4 < f_n(x_{i-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(x_i) < f(x_i) + \varepsilon/4. \quad (1.7)$$

Zauważmy, że funkcja  $f$  jest niemalejąca na  $Z$ . Co więcej, jest ona niemalejąca na  $[a, b]$ . Istotnie, niech  $s, t \in [a, b]$ ,  $s < t$ . Wybierzmy ciągi  $(s_n)$ ,  $(t_n)$  zbieżne odpowiednio do  $s$ ,  $t$  i takie, że  $s < s_n < t_n < t$  oraz  $s_n, t_n \in Z$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $f(s_n) \leq f(t_n)$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Przechodząc do granicy gdy  $n \rightarrow \infty$  i korzystając z ciągłości  $f$ , otrzymujemy  $f(s) \leq f(t)$ .

Wiedząc, że funkcja  $f$  jest niemalejąca, dostajemy  $f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$ . Stąd i z (1.7) mamy

$$f_n(x), f(x) \in (f(x_{i-1}) - \varepsilon/4, f(x_i) + \varepsilon/4)$$

dla każdego  $n \geq k$ . Dalej na mocy (1.5) otrzymujemy

$$|f_n(x) - f(x)| < (f(x_i) - f(x_{i-1})) + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon.$$

Zatem  $f_n \Rightarrow f$  na  $[a, b]$ , bo wskaźnik  $k$  nie zależy od  $x$ . □

## Rozdział 2

# Funkcje o wahanii skończonym

### 2.1 Wahanie funkcji. Podstawowe własności

Podziałem przedziału  $[a, b]$  nazywamy skończony zbiór  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zbiór wszystkich podziałów przedziału  $[a, b]$  oznaczamy przez  $\mathcal{P}[a, b]$ .

**Definicja 2.1.** Wahaniem funkcji  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy element zbioru  $[0, \infty]$  dany wzorem

$$\bigvee_a^b f := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : P = \{x_0, \dots, x_n\}, P \in \mathcal{P}[a, b] \right\}.$$

Jeśli  $\bigvee_a^b f < \infty$ , to mówimy, że  $f$  jest funkcją o wahanii skończonym (na  $[a, b]$ ).

#### Przykłady

1. Każda funkcja monotoniczna  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma wahanie skończone. Dokładniej  $\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|$ .
2. Załóżmy, że funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek Lipschitza na  $[a, b]$ , tj.

$$(\exists L > 0) (\forall x, y \in [a, b]) |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Wtedy  $f$  ma wahanie skończone. Istotnie, niech  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ .

Mamy

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = L(b - a).$$

Stąd  $\bigvee_a^b f \leq L(b - a)$ .



3. Funkcja Dirichleta na  $[0, 1]$  ma wahanie nieskończone (ćwiczenie).
4. Z Przykładu 1 wynika, że istnieją funkcje nieciągłe o wahanu skończonym. Istnieją też funkcje ciągłe (a nawet różniczkowalne) o wahanu nieskończonym. Taką własność ma funkcja ciągła  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{dla } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Wykazać to (ćwiczenie).

**Własność 2.1.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $[c, d] \subset [a, b]$ . Wtedy  $\bigvee_c^d f \leq \bigvee_a^b f$ .

*Dowód.* Niech  $P \in \mathcal{P}[c, d]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ . Wtedy  $Q = P \cup \{a, b\}$  jest podziałem przedziału  $[a, b]$ . Zatem

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(x_0) - f(a)| + \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(b) - f(x_n)| \leq \bigvee_a^b f.$$

Stąd i z dowolności  $P$  wynika teza.  $\square$

**Twierdzenie 2.1.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $a < c < b$ . Wtedy  $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$ .

*Dowód.* Jeśli  $\bigvee_a^c f = \infty$  lub  $\bigvee_c^b f = \infty$ , to z Własności 2.1 wynika, że  $\bigvee_a^b f = \infty$ . Zatem teza zachodzi.

Założmy więc, że  $\bigvee_a^c f < \infty$  i  $\bigvee_c^b f < \infty$ .

Niech  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ . Jeśli  $c \in P$ , to  $c = x_k$  dla pewnego  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Wtedy  $\{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, c]$  oraz  $\{x_{k+1}, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[c, b]$ . Zatem

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

Stąd i z dowolności  $P$  wynika  $\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$ .

Jeśli  $c \notin P$ , to  $x_k < c < x_{k+1}$  dla pewnego  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Wtedy  $\{x_0, \dots, x_k, c\} \in \mathcal{P}[a, c]$  oraz  $\{c, x_{k+1}, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[c, b]$ . Zatem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_k)| \\ &+ |f(x_{k+1}) - f(c)| + \sum_{i=k+2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f. \end{aligned}$$

Stąd i z dowolności  $P$  wynika  $\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$ .

Należy jeszcze pokazać nierówność przeciwną. Niech  $\varepsilon > 0$ . Z definicji  $\bigvee_a^c f$  oraz  $\bigvee_c^b f$  wynika, że istnieją  $P \in \mathcal{P}[a, c]$ ,  $P = \{s_0, \dots, s_n\}$  oraz  $Q \in \mathcal{P}[c, b]$ ,  $Q = \{t_0, \dots, t_m\}$  takie, że

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(s_{i-1})| > \bigvee_a^c f - \frac{\varepsilon}{2}; \quad \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| > \bigvee_c^b f - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Wtedy  $\{s_0, \dots, s_n = t_0, \dots, t_m\} \in \mathcal{P}[a, b]$ , a więc na mocy (2.1)

$$\bigvee_a^b f \geq \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(s_{i-1})| + \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| > \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f - \varepsilon.$$

To z dowolności  $\varepsilon$  daje żadaną nierówność.  $\square$

**Wniosek 2.1.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $a < c < b$ . Jeśli  $\bigvee_a^c f < \infty$  oraz  $\bigvee_c^b f < \infty$ , to  $\bigvee_a^b f < \infty$ .

**Uwaga 2.1.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Mamy następujące oszacowanie

$$|f(b) - f(a)| \leq \text{osc}(f, [a, b]) \leq \bigvee_a^b f, \quad (2.2)$$

gdzie  $\text{osc}(f, [a, b]) := \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in [a, b]\}$  nazywamy oscylacją funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ .

**Twierdzenie 2.2.** Każda funkcja  $f$  o wahanii ograniczonym na  $[a, b]$  jest ograniczona.

*Dowód.* Niech  $x \in [a, b]$ . Na mocy (2.2) i Własności 2.1 mamy

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \bigvee_a^x f + |f(a)| \leq \bigvee_a^b f + |f(a)|.$$

$\square$

**Twierdzenie 2.3.** Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Jeśli  $c \in \mathbb{R}$ , to  $\bigvee_a^b(cf) = |c| \bigvee_a^b f$  (dla  $c = 0$ ,  $\bigvee_a^b f = \infty$  przyjmujemy  $0 \cdot \infty := 0$ ).

(b)  $\bigvee_a^b(f + g) \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$ .

(c) Jeśli  $\bigvee_a^b f < \infty$  oraz  $\bigvee_a^b g < \infty$ , to  $\bigvee_a^b fg < \infty$ .

(d) Jeśli istnieje  $\alpha > 0$  taka, że  $|f(x)| \geq \alpha$  dla każdego  $x \in [a, b]$  oraz  $\bigvee_a^b f < \infty$ , to  $\bigvee_a^b(1/f) < \infty$ .

*Dowód.* (a) Dla dowolnego  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ , mamy

$$\sum_{i=1}^n |cf(x_i) - cf(x_{i-1})| = |c| \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

skąd łatwo wynika teza.

(b) Dla dowolnego  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ , mamy

$$\sum_{i=1}^n |(f+g)(x_i) - (f+g)(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

Stąd wynika żądana nierówność.

Dowody (c) i (d) są podobne (ćwiczenie).  $\square$

Z powyższego twierdzenia wynika, że zbiór funkcji o wahaniu skończonym na  $[a, b]$  stanowi przestrzeń liniową zamkniętą względem operacji mnożenia. Przestrzeń ta jest unormowana przez normę  $\|f\| := |f(a)| + \bigvee_a^b f$  (ćwiczenie).

**Twierdzenie 2.4.** *Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o wahaniu skończonym jest ciągła prawostronnie w punkcie  $x_0 \in [a, b)$  (lewostronnie w punkcie  $x_0 \in (a, b]$ ), to funkcja*

$$[a, b] \ni x \mapsto \bigvee_a^x f \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

*jest ciągła prawostronnie (lewostronnie) w punkcie  $x_0$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że funkcja  $f$  o wahaniu skończonym jest ciągła prawostronnie w punkcie  $x_0 \in [a, b)$ . Należy pokazać, że  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \bigvee_a^x f = \bigvee_a^{x_0} f$ . Dla  $x > x_0$  z Twierdzenia 2.1 mamy  $\bigvee_a^x f = \bigvee_a^{x_0} f + \bigvee_{x_0}^x f$ , więc wystarczy wykazać warunek  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \bigvee_{x_0}^x f = 0$ .

Niech  $\varepsilon > 0$ . Z prawostronnej ciągłości  $f$  w  $x_0$  wynika, że istnieje liczba  $z > x_0$  taka, że  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$  dla wszystkich  $x \in (x_0, z)$ . Dobierzmy podział  $P \in \mathcal{P}[x_0, b]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  taki, że

$$\bigvee_{x_0}^b f \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd dla każdego  $x \in (x_0, \min\{z, x_1\})$  mamy

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_0}^b f &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \leq |f(x_1) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |f(x_1) - f(x)| + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \varepsilon + \bigvee_x^b f. \end{aligned}$$

Stąd

$$\forall x \in (x_0, \min\{z, x_1\}) \quad \bigvee_{x_0}^x f = \bigvee_{x_0}^b f - \bigvee_x^b f < \varepsilon,$$

co daje zapowiedziany warunek. Dowód dla lewostronnej ciągłości jest podobny.  $\square$

**Uwaga 2.2.** Zachodzi implikacja odwrotna do tej podanej w powyższym twierdzeniu. Na przykład, z prawostronnej ciągłości funkcji wahanía (2.3) w punkcie  $x_0 \in [a, b]$  wynika prawostronna ciągłość funkcji  $f$  w  $x_0$ , bo dla  $x > x_0$  mamy (por. Uwagę 2.1)

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \bigvee_{x_0}^x f = \bigvee_a^x f - \bigvee_a^{x_0} f.$$

**Twierdzenie 2.5** (Półciągłość z dołu wahanía). *Jeśli  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , oraz istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  dla każdego  $x \in [a, b]$ , to*

$$\bigvee_a^b f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n.$$

*Dowód.* Jeśli  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n = \infty$ , to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że  $L := \liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n < \infty$ .

Niech  $\varepsilon > 0$ . Pokażemy, że  $\bigvee_a^b f \leq L + \varepsilon$ , co z dowolności  $\varepsilon$  daje tezę. Niech  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ . Z definicji  $L$  istnieje podciąg  $(f_{k_n})$  taki, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_{k_n} = L$ . Zatem

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \bigvee_a^b f_{k_n} < L + \varepsilon.$$

Stąd

$$\forall n \geq n_0 \quad \sum_{i=1}^m |f_{k_n}(x_i) - f_{k_n}(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b f_{k_n} < L + \varepsilon.$$

W konsekwencji

$$\sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |f_{k_n}(x_i) - f_{k_n}(x_{i-1})| \leq L + \varepsilon.$$

Z dowolności podziału  $P$  dostajemy żądany warunek.  $\square$

**Wniosek 2.2.** *Jeśli  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  dla  $x \in [a, b]$  oraz ciąg wahań  $(\bigvee_a^b f_n)$  jest ograniczony z góry przez  $M \geq 0$ , to  $\bigvee_a^b f \leq M$ .*

*Dowód.* Z poprzedniego twierdzenia mamy  $\bigvee_a^b f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n \leq M$ .  $\square$

## 2.2 Rozkład Jordana i jego konsekwencje

**Twierdzenie 2.6** (Jordana o rozkładzie). *Funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma wahanie skończone wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnicą  $f = g - h$  dwóch funkcji niemalejących  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dodatkowo funkcje  $g$  i  $h$  można dobrać tak, że dla dowolnego  $x_0 \in [a, b]$  funkcja  $f$  jest lewostronnie (prawostronnie) ciągła w punkcie  $x_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje  $g, h$  są lewostronnie (prawostronnie) ciągłe w  $x_0$ .*

*Dowód.* Jeśli  $f = g - h$ , gdzie funkcje  $g, h$  są niemalejące, to  $f, g$  mają wahanie skończone i ich różnica też ma wahanie skończone na mocy Twierdzenia 2.3.

Niech teraz  $\bigvee_a^b f < \infty$ . Połóżmy  $g(x) := \bigvee_a^x f$  dla  $x \in (a, b]$  oraz  $g(a) := 0$ . Funkcja  $g$  jest niemalejąca, bo jeśli  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ , to  $g(x_2) - g(x_1) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f \geq 0$ . Połóżmy  $h := g - f$ . Jeśli  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ , to z Twierdzenia 2.1 dostajemy

$$h(x_2) - h(x_1) = \left( \bigvee_a^{x_2} f - \bigvee_a^{x_1} f \right) - (f(x_2) - f(x_1)) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0.$$

Druga część tezy wynika z Twierdzenia 2.4 oraz Uwagi 2.2. □

**Uwaga 2.3.** Jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma wahanie skończone, to rozkład  $f = g - h$  opisany w powyższym dowodzie nie jest jedyny. Na przykład mając dany rozkład  $f = g - h$ , można dodać do każdej z funkcji  $g, h$  ustaloną funkcję niemalejącą  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i otrzymujemy rozkład  $f = (g + \varphi) - (h + \varphi)$ . Inny specjalny rozkład, zwany *kanonicznym rozkładem Jordana*, wyznaczony jest przez funkcje

$$g(x) := \frac{1}{2} \left( \bigvee_a^x f + f(x) \right) \quad h(x) := \frac{1}{2} \left( \bigvee_a^x f - f(x) \right). \quad (2.4)$$

Wtedy oczywiście  $g - h = f$  oraz dla  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ , mamy

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{2} \left( \bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_1) - f(x_2)) \right) \geq 0,$$

$$h(x_2) - h(x_1) = \frac{1}{2} \left( \bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \right) \geq 0.$$

Rozkład  $f = g - h$  za pomocą funkcji danych wzorem (2.4) jest optymalny w tym sensie, że dla funkcji niemalejących  $\bar{g}, \bar{h}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , jeśli  $f = \bar{g} - \bar{h}$ , to dla dowolnych  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ , mamy

$$g(x_2) - g(x_1) \leq \bar{g}(x_2) - \bar{g}(x_1), \quad h(x_2) - h(x_1) \leq \bar{h}(x_2) - \bar{h}(x_1),$$

tn. funkcje  $g, h$  zdefiniowane w (2.4) rosną najwolniej spośród funkcji wszystkich możliwych rozkładów. (Pokazać to – ćwiczenie.)

Ponadto z (2.4) wynika oczywiście, że  $g(x) + h(x) = \bigvee_a^x f$  dla  $x \in [a, b]$ . Stąd dla  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$ , dostajemy  $\bigvee_x^y f = \bigvee_x^y g + \bigvee_x^y h$  (ćwiczenie).

Z Twierdzeń 2.3 i 2.6 wynika, że przestrzeń liniowa generowana przez rodzinę wszystkich funkcji monotonicznych na  $[a, b]$  jest równa przestrzeni liniowej wszystkich funkcji o wahaniu skończonym na  $[a, b]$ .

Następujący wniosek wynika z Twierdzenia 2.6 i odpowiednich własności funkcji monotonicznych.

**Wniosek 2.3.** *Każda funkcja  $f$  o wahaniu skończonym na  $[a, b]$  ma w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału obie granice jednostronne oraz istnieją granice  $f(a+)$ ,  $f(b-)$ . Ponadto funkcja  $f$  ma przeliczalny zbiór punktów nieciągłości.*

Wnioskiem z Twierdzenia 2.6 i twierdzenia Helly’ego dla funkcji monotonicznych jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.7** (Helly’ego). *Załóżmy, że dla ciągu funkcji  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , jest ograniczony w ustalonym punkcie  $x_0 \in [a, b]$  oraz ciąg wahań  $(\bigvee_a^b f_n)$  jest ograniczony. Wtedy z ciągu  $(f_n)$  można wybrać podciąg  $(f_{l_n})$  zbieżny punktowo do funkcji  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o wahaniu skończonym na  $[a, b]$ .*

*Dowód.* Wybierzmy liczbę  $M \geq 0$  tak, żeby  $|f_n(x_0)| \leq M$  oraz  $\bigvee_a^b f_n \leq M$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0)| \leq \bigvee_a^b f_n + M \leq 2M$  dla wszystkich  $x \in [a, b]$  oraz  $n \in \mathbb{N}$ . Dla każdej funkcji  $f_n$  rozważmy kanoniczny rozkład Jordana  $f_n = g_n - h_n$ ; por. (2.4). Dla wszystkich  $x \in [a, b]$  oraz  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$|g_n(x)| = \frac{1}{2} \left| \bigvee_a^x f_n + f_n(x) \right| \leq \frac{3}{2}M, \quad |h_n(x)| = \frac{1}{2} \left| \bigvee_a^x f_n - f_n(x) \right| \leq \frac{3}{2}M.$$

Możemy więc zastosować twierdzenie Helly’ego do ciągów  $(g_n)$ ,  $(h_n)$  funkcji monotonicznych na  $[a, b]$ . Najpierw wybierzmy podciąg  $(g_{k_n})$  ciągu  $(g_n)$  punktowo zbieżny do funkcji  $g$  na  $[a, b]$ . Następnie z ciągu  $(h_{k_n})$  wybierzmy podciąg  $(h_{l_n})$  punktowo zbieżny do funkcji  $h$  na  $[a, b]$ . Wtedy  $f_{l_n} = g_{l_n} - h_{l_n} \rightarrow g - h$  na  $[a, b]$ . Funkcja  $f := g - h$  ma wahanie skończone na  $[a, b]$  jako różnica dwóch funkcji niemalejących.  $\square$



## Rozdział 3

# Całka Riemanna-Stieltjesa

### 3.1 Definicja całki. Podstawowe własności

Całka Riemanna-Stieltjesa jest naturalnym rozszerzeniem pojęcia całki Riemanna znanego z kursu analizy.

**Definicja 3.1.** Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Rozważmy podział  $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$  oraz układ  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$  punktów pośrednich  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  (dla  $i = 1, \dots, k$ ) odpowiadających podziałowi  $P$ . Utwórzmy sumę całkową

$$S(f, g, P, \bar{t}) := \sum_{i=1}^k f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Mówimy, że liczba  $A \in \mathbb{R}$  jest całką Riemanna-Stieltjesa (RS-całką) funkcji  $f$  względem funkcji  $g$  na  $[a, b]$ , gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \in \mathcal{P}[a, b] \forall \bar{t} \quad (\mu(P) < \delta \Rightarrow |S(f, g, P, \bar{t}) - A| < \varepsilon), \quad (3.1)$$

gdzie  $\mu(P) := \max_{1 \leq i \leq k} (x_i - x_{i-1})$  jest średnicą podziału  $P$ . Oznaczamy  $A = \int_a^b f dg$ , zaś warunek (3.1) zapisujemy jako zbieżność sum całkowych

$$\lim_{\mu(P) \rightarrow 0} S(f, g, P, \bar{t}) = \int_a^b f dg.$$

Z powyższej definicji wynika, że jeśli istnieje RS-całka  $\int_a^b f dg$ , to jest tylko jedna (ćwiczenie, dowód nie wprost).

#### Przykłady

1. Jeśli  $g(x) = x$  dla  $x \in [a, b]$ , to RS-całka staje się całką Riemanna  $\int_a^b f(x) dx$ .



2. Niech  $f(x) := 1$  dla  $x \in [a, b]$ . Wtedy  $S(f, g, P, \bar{t}) = \sum_{i=1}^k (g(x_i) - g(x_{i-1})) = g(b) - g(a)$ . Zatem  $\int_a^b f dg = g(b) - g(a)$ .

3. Niech  $g := \chi_{(c,b]}$ , gdzie  $c \in [a, b)$  jest ustalonym punktem oraz niech funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła w punkcie  $c$ . Pokażemy, że  $\int_a^b f dg = f(c)$ . Niech  $\varepsilon > 0$ . Skoro  $f$  jest ciągła w punkcie  $c$ , to dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  taką, że

$$\forall t \in [a, b] \quad (|t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon).$$

Niech  $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$  będzie taki, że  $\mu(P) < \delta$  i niech  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ , gdzie  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  dla  $i = 1, \dots, k$ . Istnieje dokładnie jeden indeks  $j \in \{1, \dots, k\}$  taki, że  $c \in [x_{j-1}, x_j]$ . Wtedy

$$S(f, g, P, \bar{t}) = f(t_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = f(t_j).$$

Stąd i z doboru liczby  $\delta$  mamy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - f(c)| = |f(t_j) - f(c)| < \varepsilon.$$

Następujące twierdzenie pokazuje, że przy stosownych założeniach o funkcji  $g$  możemy RS-calkę sprowadzić do odpowiedniej całki Riemanna.

**Twierdzenie 3.1.** *Załóżmy, że  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , zaś funkcja  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ściśle rosnąca i ciągła. Wówczas RS-calka  $\int_a^b f dg$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka Riemanna  $\int_{g(a)}^{g(b)} f \circ g^{-1} dx$  oraz*

$$\int_a^b f dg = \int_{g(a)}^{g(b)} f \circ g^{-1} dx.$$

*Dowód.* Rozważmy podział  $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$  oraz układ  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$  punktów pośrednich  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  dla  $i = 1, \dots, k$ . Stosując funkcję  $g$ , otrzymamy punkty  $y_i := g(x_i)$ , które stanowią podział  $Q = \{y_0, \dots, y_k\} \in \mathcal{P}[g(a), g(b)]$ . Ponadto dostajemy układ  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$  punktów pośrednich  $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$ , gdzie  $s_i := g(t_i)$  dla  $i = 1, \dots, k$ . Zauważmy, że

$$S(f, g, P, \bar{t}) := \sum_{i=1}^k f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^k (f \circ g^{-1})(s_i)(y_i - y_{i-1}) = S(f \circ g^{-1}, \text{id}, Q, \bar{s}). \quad (3.2)$$

Odwrotnie, mając podział  $Q = \{y_0, \dots, y_k\} \in \mathcal{P}[g(a), g(b)]$  i układ  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$  punktów pośrednich  $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$ , otrzymujemy podział  $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$  oraz układ  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$  punktów pośrednich, gdzie  $x_i := g^{-1}(y_i)$ ,  $t_i := g^{-1}(s_i)$  dla  $i = 1, \dots, k$  oraz (3.2) zachodzi.

Założmy, że RS-całka  $\int_a^b f dg$  istnieje. Wtedy dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  znajdziemy liczbę  $\delta > 0$  taką, że

$$\forall P \in \mathcal{P}[a, b] \quad \forall \bar{t} \quad \left( \mu(P) < \delta \Rightarrow \left| S(f, g, P, \bar{t}) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon \right). \quad (3.3)$$

Skoro funkcja  $g$  jest ciągłą iniekcją na zbiorze zwartym  $[a, b]$ , to jest ona homeomorfizmem przekształcającym  $[a, b]$  na  $[g(a), g(b)]$ . Zatem funkcja  $g^{-1}$  jest jednostajnie ciągła na  $[g(a), g(b)]$ . Dobierzmy więc liczbę  $\eta > 0$  taką, że  $|g^{-1}(u) - g^{-1}(v)| < \delta$  dla dowolnych  $u, v \in [g(a), g(b)]$  takich, że  $|u - v| < \eta$ . Niech podział  $Q = \{y_0, \dots, y_k\} \in \mathcal{P}[g(a), g(b)]$  będzie taki, że  $\mu(Q) < \eta$  i rozważmy układ  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$  punktów pośrednich  $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$ . Stosując jak powyżej funkcję  $g^{-1}$ , otrzymamy odpowiedni podział  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  oraz układ  $\bar{t}$ , przy czym z doboru liczby  $\eta$  mamy  $\mu(P) < \delta$ . Do  $P$  oraz  $\bar{t}$  możemy zastosować (3.3), przy czym na mocy (3.2) możemy zastąpić sumę  $S(f, g, P, \bar{t})$  przez sumę  $S(f \circ g^{-1}, \text{id}, Q, \bar{s})$ . Dobraliśmy więc liczbę  $\eta > 0$  taką, że

$$\forall Q \in \mathcal{P}[g(a), g(b)] \quad \forall \bar{s} \quad \left( \mu(Q) < \eta \Rightarrow \left| S(f \circ g^{-1}, \text{id}, Q, \bar{s}) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon \right). \quad (3.4)$$

To pokazuje, że całka  $\int_{g(a)}^{g(b)} f \circ g^{-1} dx$  istnieje i jest równa  $\int_a^b f dg$ .

Dowód implikacji w drugą stronę jest analogiczny.  $\square$

**Twierdzenie 3.2.** Niech  $f, g, f_i, g_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $c_i \in \mathbb{R}$  dla  $i = 1, 2$ .

(i) Jeśli całki  $\int_a^b f_i dg$  istnieją dla  $i = 1, 2$ , to istnieje całka  $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg$  oraz

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg.$$

(ii) Jeśli całki  $\int_a^b f dg_i$  istnieją dla  $i = 1, 2$ , to istnieje całka  $\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2)$  oraz

$$\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

*Dowód.* Należy skorzystać z definicji RS-całki – jest to nietrudne ćwiczenie.  $\square$

Następujące twierdzenie jest warunkiem typu Cauchy'ego równoważnym istnieniu RS-całki.

**Twierdzenie 3.3.** Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Na to, by istniała całka  $\int_a^b f dg$  potrzeba i wystarcza, by zachodził warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P, \bar{t} \quad \forall P', \bar{t}' \quad (\max\{\mu(P), \mu(P')\} < \delta \Rightarrow |S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, P', \bar{t}')| < \varepsilon), \quad (3.5)$$

gdzie  $P, P'$  są podziałami przedziału  $[a, b]$ , zaś  $\bar{t}, \bar{t}'$  są odpowiednimi układami punktów pośrednich.

*Dowód.* Konieczność. Niech  $\varepsilon > 0$ . Z założenia istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że

$$\forall P \in \mathcal{P}[a, b] \quad \forall \bar{t} \quad \left( \mu(P) < \delta \Rightarrow \left| S(f, g, P, \bar{t}) - \int_a^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Rozważmy dowolne podziały  $P, P'$  przedziału  $[a, b]$  takie, że  $\max\{\mu(P), \mu(P')\} < \delta$  oraz odpowiednie układy  $t, t'$  punktów pośrednich. Wtedy

$$\begin{aligned} |S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, P', \bar{t}')| &\leq \left| S(f, g, P, \bar{t}) - \int_a^b f dg \right| + \left| \int_a^b f dg - S(f, g, P', \bar{t}') \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

*Dostateczność.* Dla  $n \in \mathbb{N}$  weźmy kolejno  $\varepsilon_n := 1/n$  i według założenia (3.5) dobierzmy odpowiednie liczby  $\delta_n > 0$ , przy czym można przyjąć, że  $\delta_{n+1} < \delta_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Dla  $n \in \mathbb{N}$  wybierzmy podział  $P_n \in \mathcal{P}[a, b]$  taki, że  $\mu(P_n) < \delta_n$  i odpowiedni układ  $\bar{t}_n$  punktów pośrednich. Oznaczmy  $S_n := S(f, g, P_n, \bar{t}_n)$ .

Niech  $\varepsilon > 0$  i dobierzmy  $k \in \mathbb{N}$  tak, by  $1/k < \varepsilon$ . Dla dowolnych  $m, n \geq k$  mamy  $\mu(P_m) < \delta_m \leq \delta_k$ ,  $\mu(P_n) < \delta_n \leq \delta_k$ , a więc  $|S_m - S_n| < \frac{1}{k} < \varepsilon$ . Zatem ciąg liczbowy  $(S_n)$  spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny do pewnej liczby  $A \in \mathbb{R}$ .

Pokażemy, że  $\int_a^b f dg = A$ . Niech  $\varepsilon > 0$  i dobierzmy  $N \in \mathbb{N}$  tak, by  $1/N < \varepsilon/2$  oraz  $|s_N - A| < \varepsilon/2$ . Niech  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $\mu(P) < \delta_N$  i niech  $\bar{t}$  będzie odpowiednim układem punktów pośrednich. wtedy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - A| \leq |S(f, g, P, \bar{t}) - S_N| + |S_N - A| < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem  $\int_a^b f dg = A$ . □

Korzystając z poprzedniego twierdzenia, udowodnimy następującą własność addytywności całki względem przedziału.

**Twierdzenie 3.4.** *Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $a < c < b$ . Jeśli całka  $\int_a^b f dg$  istnieje, to istnieją całki  $\int_a^c f dg$  oraz  $\int_c^b f dg$ , przy czym  $\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że całka  $\int_a^b f dg$  istnieje. Zatem zachodzi warunek (3.5). Udowodnimy, że całka  $\int_a^c f dg$  istnieje. Niech  $\varepsilon > 0$ . Na mocy (3.5) dobierzmy odpowiednią liczbę  $\delta > 0$ . Niech  $Q, Q' \in \mathcal{P}[a, c]$ ,  $\max\{\mu(Q), \mu(Q')\} < \delta$  oraz niech  $\bar{t}, \bar{s}$  będzie odpowiednimi układami punktów pośrednich. Ustalmy podział  $T \in \mathcal{P}[c, b]$  taki, że  $\mu(T) < \delta$  wraz z odpowiednim układem  $\bar{u}$  punktów pośrednich. Wówczas  $P := Q \cup T$  oraz  $P' := Q' \cup T$  są podziałami przedziału  $[a, b]$  oraz  $\max\{\mu(P), \mu(P')\} < \delta$ . Przyjmijmy  $\bar{v} := \bar{t} \cup \bar{u}$  oraz

$\bar{w} := \bar{s} \smile \bar{u}$  jako odpowiednie układy punktów pośrednich, np. jeśli  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ ,  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$ , to  $\bar{t} \smile \bar{u} := (t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_m)$ . Mamy teraz

$$|S(f, g, Q, \bar{t}) - S(f, g, Q', \bar{s})| = |S(f, g, P, \bar{v}) - S(f, g, P', \bar{w})| < \varepsilon,$$

co oznacza, że spełniona jest wersja warunku (3.5) zapewniającego istnienie całki  $\int_a^c f dg$ .

Istnienie całki  $\int_c^b f dg$  wykazujemy analogicznie.

Dla dowodu równości w tezie weźmy  $\varepsilon > 0$  i dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  tak, by

$$\left| S(f, g, P, \bar{v}) - \int_a^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| S(f, g, Q, \bar{t}) - \int_a^c f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| S(f, g, T, \bar{u}) - \int_c^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla dowolnych podziałów  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $Q \in \mathcal{P}[a, c]$ ,  $T \in \mathcal{P}[c, b]$  takich, że

$$\max\{\mu(P), \mu(Q), \mu(T)\} < \delta$$

oraz odpowiednich układów  $\bar{v}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{u}$  punktów pośrednich. Ustalmy  $Q \in \mathcal{P}[a, c]$ ,  $T \in \mathcal{P}[c, b]$  takie, że  $\max\{\mu(Q), \mu(T)\} < \delta$  oraz odpowiednie układy  $\bar{t}$ ,  $\bar{u}$  punktów pośrednich. Wtedy  $P := Q \cup T \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $\mu(P) < \delta$  oraz  $\bar{v} := \bar{t} \smile \bar{u}$  jest odpowiednim układem punktów pośrednich. Ponadto  $S(f, g, P, \bar{v}) = S(f, g, Q, \bar{t}) + S(f, g, T, \bar{u})$ . Zatem

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f dg - \int_a^c f dg - \int_c^b f dg \right| &\leq \left| \int_a^b f dg - S(f, g, P, \bar{v}) \right| \\ &+ \left| S(f, g, Q, \bar{t}) - \int_a^c f dg \right| + \left| S(f, g, T, \bar{u}) - \int_c^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności  $\varepsilon > 0$  dostajemy żądaną równość.  $\square$

**Uwaga 3.1.** Niech  $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będą dane wzorami  $f := \chi_{(0,1]}$ ,  $g := \chi_{[0,1]}$ . Wtedy  $\int_{-1}^0 f dg = 0 = \int_0^1 f dg$  (por. Przykłady 2 i 3). Jednakże całka  $\int_{-1}^1 f dg$  nie istnieje (ćwiczenie).

## 3.2 Kiedy RS-całka istnieje?

**Twierdzenie 3.5** (Całkowanie przez części). *Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Rozważmy całki  $\int_a^b f dg$  i  $\int_a^b g df$ . Istnienie jednej z tych całek jest równoważne istnieniu drugiej oraz zachodzi wzór*

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = [f(x)g(x)]_a^b,$$

gdzie  $[f(x)g(x)]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$ .

*Dowód.* Załóżmy np. istnienie całki  $\int_a^b gdf$  oraz dla liczby  $\varepsilon > 0$  dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  według definicji

$$\lim_{\mu(P) \rightarrow 0} S(g, f, P, \bar{t}) = \int_a^b gdf.$$

Ustalmy dowolny podział  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  o średnicy  $< \delta/2$  i dowolny układ  $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$  punktów pośrednich. Utwórzmy sumę

$$S := S(f, g, P, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Wtedy stosując przekształcenie Abela, mamy

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n f(t_i)g(x_i) - \sum_{i=1}^n f(t_i)g(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1})g(x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i)) + f(t_n)g(b) - f(t_1)g(a). \end{aligned}$$

Stąd dodając i odejmując  $[f(x)g(x)]_a^b$ , otrzymujemy że  $S$  jest równe

$$[f(x)g(x)]_a^b - \left( g(a)(f(t_1) - f(a)) + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i)) + g(b)(f(b) - f(t_n)) \right). \quad (3.6)$$

Niech  $P' := \{a, t_1, t_2, \dots, t_n, b\}$ . Wtedy  $a \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq b$ , więc  $P'$  potraktujemy jako podział przedziału  $[a, b]$ , w którym sąsiednie punkty mogą być równe. Równość (3.6) można więc zapisać w postaci

$$S(f, g, P, \bar{t}) = [f(x)g(x)]_a^b - S(g, f, P', \bar{x}), \quad (3.7)$$

gdzie  $\bar{x} := (x_0, x_1, \dots, x_n)$  jest układem punktów pośrednich dla podziału  $P'$ . Zauważmy, że  $\mu(P') < \delta$ . Zatem z doboru liczby  $\delta$  mamy  $|S(g, f, P', \bar{x}) - \int_a^b gdf| < \varepsilon$ . Teraz na mocy (3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| S(f, g, P, \bar{t}) - \left( [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b gdf \right) \right| \\ &= \left| S(f, g, P, \bar{t}) - [f(x)g(x)]_a^b + S(g, f, P', \bar{x}) - S(g, f, P', \bar{x}) + \int_a^b gdf \right| \\ &= \left| S(g, f, P', \bar{x}) - \int_a^b gdf \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

To oznacza, że

$$\lim_{\mu(P) \rightarrow 0} S(f, g, P, \bar{t}) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b gdf.$$

Zatem  $\int_a^b f dg$  istnieje i zachodzi wzór podany w tezie.  $\square$

**Twierdzenie 3.6.** Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeśli jedna z funkcji  $f, g$  jest ciągła, a druga ma wahanie skończone, to całki  $\int_a^b f dg, \int_a^b g df$  istnieją.

*Dowód.* Na mocy Twierdzenia 3.5 wystarczy wykazać, że istnieje jedna z całek. Załóżmy, że funkcja  $f$  jest ciągła na  $[a, b]$ , zaś  $g$  ma wahanie skończone. Pokażemy istnienie całki  $\int_a^b f dg$ . Ze względu na rozkład Jordana i Twierdzenie 3.2 (ii) wystarczy rozważyć przypadek, gdy funkcja  $g$  jest niemalejąca. Niech więc będzie  $g$  niemalejąca oraz niestała. Oznaczmy  $c := g(b) - g(a)$ . Wtedy  $c > 0$ .

Dla podziału  $P = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  oraz  $i = 1, \dots, n$  oznaczmy

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

a następnie

$$\underline{S}(f, g, P) := \sum_{i=1}^n m_i(g(x_i) - g(x_{i-1})), \quad \overline{S}(f, g, P) := \sum_{i=1}^n M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Zauważmy, że dla dowolnego układu  $\bar{t}$  punktów pośrednich dla  $P$  mamy

$$\underline{S}(f, g, P) \leq S(f, g, P, \bar{t}) \leq \overline{S}(f, g, P). \quad (3.8)$$

Nietrudno sprawdzić (ćwiczenie), że zbiór  $\{\underline{S}(f, g, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$  jest ograniczony z góry przez dowolną sumę postaci  $\overline{S}(f, g, P)$ . Oznaczmy  $I := \sup\{\underline{S}(f, g, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ . Dla dowolnego  $P$  mamy

$$\underline{S}(f, g, P) \leq I \leq \overline{S}(f, g, P). \quad (3.9)$$

Pokażemy, że  $\int_a^b f dg = I$ .

Niech  $\varepsilon > 0$ . Z jednostajnej ciągłości funkcji  $f$  na  $[a, b]$  dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  taką, że  $|f(u) - f(v)| < \varepsilon/c$  dla dowolnych  $u, v \in [a, b]$  o własności  $|u - v| < \delta$ . Rozważmy dowolny podział  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ , dla którego  $\mu(P) < \delta$ . Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że dla  $i = 1, \dots, n$  istnieją  $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$  takie, że  $m_i = f(u_i), M_i = f(v_i)$ . Wtedy  $|u_i - v_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$ , więc  $M_i - m_i < \varepsilon/c$ . Stąd

$$\overline{S}(f, g, P) - \underline{S}(f, g, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) < \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) = \varepsilon.$$

Weźmy dowolny układ punktów pośrednich  $\bar{t}$  dla podziału  $P$ . Korzystając z (3.8) i (3.9), mamy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - I| \leq \overline{S}(f, g, P) - \underline{S}(f, g, P) < \varepsilon,$$

a to oznacza, że  $I = \int_a^b f dg$ . □

Kolejne twierdzenie pokazuje, że przy pewnych założeniach (innych niż w Twierdzeniu 3.1) RS-całkę można liczyć jako odpowiednią całkę Riemanna.

**Twierdzenie 3.7.** *Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , przy czym  $f$  jest całkowna w sensie Riemanna na  $[a, b]$ ,  $g$  jest różniczkowalna oraz  $g'$  jest całkowna w sensie Riemanna na  $[a, b]$ . Wtedy istnieje całka  $\int_a^b f dg$  oraz*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx.$$

*Dowód.* Z założeń wynika, że całka Riemanna  $I := \int_a^b f g' dx$  istnieje. Pokażemy, że  $\int_a^b f dg = I$ . Niech  $\varepsilon > 0$ . Z teorii całki Riemanna i całkowności  $f$  na  $[a, b]$  wiemy, że istnieje liczba  $\delta_1 > 0$  taka, że dla każdego podziału  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  o średnicy  $< \delta_1$  mamy

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon, \quad (3.10)$$

gdzie  $m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ ,  $M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Skoro  $I = \int_a^b f g' dx$ , to istnieje liczba  $\delta_2 > 0$  taka, że dla każdego podziału  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  o średnicy  $< \delta_2$  i dowolnego układu  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$  punktów pośrednich mamy

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(t_i) g'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (3.11)$$

Niech  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Rozważmy dowolny podział  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  o średnicy  $< \delta$  i dowolny układ  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$  punktów pośrednich. Na mocy twierdzenia Lagrange'a dobierzmy punkty  $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$  takie, że  $g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(s_i)(x_i - x_{i-1})$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Funkcja  $g'$  jako całkowna w sensie Riemanna na  $[a, b]$  jest ograniczona. Niech liczba  $K$  będzie taka, że  $|g'(x)| \leq K$  dla każdego  $x \in [a, b]$ . Korzystając z (3.10) i (3.11), dostajemy

$$\begin{aligned} & \left| I - \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \right| = \left| I - \sum_{i=1}^n f(t_i)g'(s_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ & \leq \left| I - \sum_{i=1}^n f(s_i)g'(s_i)(x_i - x_{i-1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^n (f(s_i) - f(t_i))g'(s_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ & < \varepsilon + K \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon + K\varepsilon = (1 + K)\varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności  $\varepsilon$  otrzymujemy  $\int_a^b f dg = I$ .  $\square$

**Twierdzenie 3.8.** *Jeśli funkcje  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mają wspólny punkt nieciągłości  $c \in [a, b]$ , to nie istnieje RS-całka  $\int_a^b f dg$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $c < b$  oraz  $f$  nie jest prawostronnie ciągła w punkcie  $c$ . (Dowód, gdy  $a < c$  oraz  $f$  nie jest lewostronnie ciągła w  $c$ , przebiega podobnie.) Zatem dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$  mamy

$$\forall \sigma > 0 \exists x \in (c, c + \sigma) |f(x) - f(c)| > \varepsilon. \quad (3.12)$$

Rozważmy dwa przypadki:

1<sup>0</sup> Funkcja  $g$  nie jest prawostronnie ciągła w punkcie  $c$ . Dla pewnej liczby  $\varepsilon_0 > 0$  mamy więc

$$\forall \delta > 0 \exists y \in (c, c + \delta) |g(y) - g(c)| > \varepsilon_0. \quad (3.13)$$

Pokażemy, że całka  $\int_a^b f dg$  nie istnieje, gdyż nie zachodzi warunek typu Cauchy'ego z Twierdzenia 3.3. Niech liczba  $\delta > 0$  będzie dowolna. Ustalmy podział  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  taki, że  $\mu(P) < \delta$  oraz  $c = x_{k-1}$  dla pewnego  $k \in \{1, \dots, n\}$ , przy czym punkt  $x_k$  jest dobrany tak, by  $|g(x_k) - g(c)| > \varepsilon_0$  na podstawie (3.13). Dalej z warunku (3.12) dobierzmy punkt  $x \in (c, x_k)$  taki, że  $|f(x) - f(c)| > \varepsilon$ . Niech  $Q := P$  oraz niech  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ ,  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_n)$  będą takie, że  $t_k := x$ ,  $s_k := c$  oraz  $t_i = s_i$  dla  $i \neq k$ . Wtedy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, Q, \bar{s})| = |f(x) - f(c)| |g(y) - g(c)| > \varepsilon \cdot \varepsilon_0,$$

co pokazuje, że warunek typu Cauchy'ego nie zachodzi.

2<sup>0</sup> Funkcja  $g$  jest prawostronnie ciągła w punkcie  $c$  i nie jest w nim lewostronnie ciągła. Teraz dla pewnego  $\varepsilon_0 > 0$  mamy

$$\forall \delta > 0 \exists y \in (c - \delta, c) |g(y) - g(c)| > \varepsilon_0. \quad (3.14)$$

Niech liczba  $\delta > 0$  będzie dowolna. Wybieramy podział  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  taki, że  $\mu(P) < \delta$  oraz  $x_{k-1} < c < x_k$  dla pewnego  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Punkt  $x_{k-1} \in (c - \delta, c)$  dobieramy na podstawie (3.14) tak, by  $|g(x_{k-1}) - g(c)| > \varepsilon_0$ . Wtedy też  $|g(x_{k-1}) - g(z)| > \varepsilon_0$  dla wszystkich  $z \in (c, c + \eta)$ , gdzie istnienie liczby  $\eta > 0$  wynika z prawostronnej ciągłości  $g$  w punkcie  $c$ . Dalej dla  $\sigma := \min\{\eta, \delta - (c - x_{k-1})\}$  na podstawie (3.12) dobieramy  $x_k \in (c, c + \sigma)$  tak, by  $|f(x_k) - f(c)| > \varepsilon$ . (Warunek  $x_k < \delta - (c - x_{k-1})$  narzucamy po to, by mieć  $x_k - x_{k-1} < \delta$ .) Niech  $Q := P$  oraz niech  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ ,  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_n)$  będą takie, że  $t_k := x_k$ ,  $s_k := c$  oraz  $t_i = s_i$  dla  $i \neq k$ . Podobnie jak poprzednio dostajemy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, Q, \bar{s})| = |f(x_k) - f(c)| |g(x_k) - g(x_{k-1})| > \varepsilon \cdot \varepsilon_0.$$

□





## Rozdział 4

# Twierdzenie Vitaliego o pokryciu

### 4.1 Twierdzenie Vitaliego

Przez  $\lambda$  oznaczamy miarę Lebesgue'a na prostej rzeczywistej. Przypomnijmy, że  $\lambda$  jest miarą zewnętrzną Lebesgue'a  $\lambda^*$  obciętą do  $\sigma$ -ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na  $\mathbb{R}$ . Dla przedziału  $I \subset \mathbb{R}$  będziemy czasem pisać krótko  $|I| := \lambda(I)$  (wiedząc, że miara Lebesgue'a przedziału jest równa jego długości).

**Definicja 4.1.** Niech  $E \subset \mathbb{R}$ . Mówimy, że rodzina  $\mathcal{F}$  niezdegenerowanych przedziałów domkniętych pokrywa zbiór  $E$  w sensie Vitaliego, gdy

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \in \mathcal{F} \quad (x \in I \wedge |I| < \varepsilon). \quad (4.1)$$

**Twierdzenie 4.1** (Vitaliego o pokryciu). *Jeśli rodzina  $\mathcal{F}$  niezdegenerowanych przedziałów domkniętych pokrywa zbiór  $E \subset \mathbb{R}$  w sensie Vitaliego, to istnieje przeliczalna podrodzina  $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$  złożona z przedziałów parami rozłącznych taka, że  $\lambda(E \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_*} I) = 0$ .*

*Dowód.* Możemy założyć, że zbiór  $E$  jest ograniczony. Istotnie, przypuśćmy że  $E$  jest nieograniczony i rozważamy zbiory  $E_n := E \cap (n, n+1)$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ , które są ograniczone oraz  $(E \cap \mathbb{Z}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n = E$ . Rodzina  $\mathcal{F}$  pokrywa każdy ze zbiorów  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , w sensie Vitaliego. Ponadto dla każdego ustalonego  $n$  możemy zastąpić  $\mathcal{F}$  przez jej podrodzinę pokrywającą  $E_n$  w sensie Vitaliego, której przedziały są zawarte w  $(n, n+1)$ . Załóżmy, że znaleźliśmy przeliczalne rodziny  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , złożone z przedziałów parami rozłącznych takie, że  $\lambda^*(E_n \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I) = 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Niech  $\mathcal{F}_* = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n$ . Wtedy  $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$  oraz  $\mathcal{F}_*$  składa się z przedziałów parami rozłącznych. Ponadto

$$\lambda^* \left( E \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_*} I \right) \leq \lambda^*(E \cap \mathbb{Z}) + \lambda^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I \right)$$

$$\leq \lambda^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left( E_n \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I \right) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^* \left( E_n \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I \right) = 0.$$

Zatem rodzina  $\mathcal{F}_*$  spełnia tezę dla zbioru  $E$ .

Założmy zatem, że  $E \subset J$ , gdzie  $J$  jest ograniczonym przedziałem otwartym, przy czym wszystkie przedziały rodziny  $\mathcal{F}$  są zawarte w  $J$ . Przedziały podrodziny  $\mathcal{F}_*$  będziemy wybierać indukcyjnie, ustawiając je w ciąg  $(I_k)$ . Założmy, że wybraliśmy już przedziały  $I_1, \dots, I_n$ . Jeśli  $E \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$ , to przyjmując  $\mathcal{F}_* := \{I_1, \dots, I_n\}$ , mamy tezę. Jeśli zaś  $E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k \neq \emptyset$ , to położmy  $F_n := \bigcup_{k=1}^n I_k$ . Wtedy  $G_n := J \setminus F_n$  jest niepustym zbiorem otwartym. Niech

$$M_n := \sup\{|I| : I \in \mathcal{F} \wedge I \subset G_n\}.$$

Zbiór, którego kres górny tu rozważamy, jest niepusty, bo  $E \setminus F_n \neq \emptyset$  oraz  $\mathcal{F}$  jest pokryciem w sensie Vitaliego. Oczywiście  $M_n > 0$  i z definicji kresu górnego wybierzmy przedział  $I_{n+1} \in \mathcal{F}$  taki, że  $I_{n+1} \subset G_n$  oraz

$$|I_{n+1}| > M_n - \frac{1}{2}M_n = \frac{1}{2}M_n. \quad (4.2)$$

Ponieważ  $I_{n+1} \subset G_n$ , więc  $I_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^n I_k = \emptyset$ . Gdy  $E \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} I_k$ , to położmy  $\mathcal{F}_* := \{I_1, \dots, I_{n+1}\}$ . W przeciwnym razie powtarzamy rozumowanie. Jeśli konstrukcja przebiega w skończonej liczbie kroków, to teza zachodzi. Założmy więc, że konstrukcja prowadzi do nieskończonego ciągu  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Z konstrukcji wynika, że przedziały tego ciągu są parami rozłączne. Położmy  $\mathcal{F}_* := \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że  $\lambda^*(E \setminus F) = 0$ , gdzie  $F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ .

Dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  niech  $J_k$  będzie przedziałem współśrodkowym z  $I_k$  i takim, że  $|J_k| = 5|I_k|$ . Mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| = 5 \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = 5\lambda \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right) \leq 5|J| < \infty. \quad (4.3)$$

Wykażemy, że

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad E \setminus F \subset \bigcup_{k \geq j} J_k, \quad (4.4)$$

gdyż to daje tezę. Istotnie, dla  $\varepsilon > 0$  dobierzmy  $j \in \mathbb{N}$  tak, by  $\sum_{k=j}^{\infty} |J_k| < \varepsilon$  (reszta szeregu zbieżnego, por. wzór (4.3)). Na mocy (4.4) mamy  $E \setminus F \subset \bigcup_{k \geq j} J_k$ , a to z dowolności  $\varepsilon > 0$  oznacza, że  $\lambda^*(E \setminus F) = 0$ .

Dla dowodu (4.4) ustalmy  $j \in \mathbb{N}$  oraz  $x \in E \setminus F$ . Ponieważ  $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ , więc  $x \in E \setminus F_j \subset J \setminus F_j = G_j$ . Skoro rodzina  $\mathcal{F}$  pokrywa zbiór  $E$  w sensie Vitaliego, to

istnieje przedział  $I \in \mathcal{F}$  taki, że  $x \in I \subset G_j$ . Wtedy znajdziemy wskaźnik  $n > j$ , dla którego  $I \cap F_n \neq \emptyset$ . Istotnie, gdyby  $I \cap F_n = \emptyset$  dla każdego  $n > j$ , to  $I \subset G_n$  oraz z warunku (4.2) mielibyśmy

$$\forall n > j \quad |I| \leq M_n < 2|I_{n+1}|,$$

co jest niemożliwe, bo  $|I_n| \rightarrow 0$  na mocy zbieżności szeregu  $\sum |I_n|$ . Rozważmy więc niepusty zbiór

$$A := \{n > j : I \cap F_n \neq \emptyset\}$$

i niech  $m := \min A$ . Wtedy  $I \cap F_m \neq \emptyset$  oraz  $I \cap F_{m-1} = \emptyset$ . Stąd  $I \subset G_{m-1}$ , a więc z definicji  $M_{m-1}$  i wzoru (4.2) mamy

$$|I| \leq M_{m-1} < 2|I_m|. \quad (4.5)$$

Skoro  $I \cap F_m \neq \emptyset$  oraz  $I \cap F_{m-1} = \emptyset$ ,  $F_m = F_{m-1} \cup I_m$ , to  $I \cap I_m \neq \emptyset$ . Stąd, z (4.5) i wyboru przedziału  $J_m$  mamy  $I \subset J_m$ . Zatem

$$x \in I \subset J_m \subset \bigcup_{k \geq j} J_k,$$

co kończy dowód (4.4). □

Twierdzenie Vitaliego o pokryciu ma ważne zastosowania w teorii funkcji rzeczywistych. Jedno z nich pokażemy w następnym podrozdziale.

## 4.2 Różniczkowalność funkcji monotonicznych

**Definicja 4.2.** Mówimy, że  $\alpha \in [-\infty, \infty]$  jest liczbą pochodną funkcji  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $x_0 \in [a, b]$ , gdy istnieje ciąg  $(h_n)$  liczb różnych od 0 zbieżny do 0 taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \alpha.$$

Uwaga: Funkcja  $f$  ma w każdym punkcie przynajmniej jedną liczbę pochodną. Wynika to stąd, że każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny lub rozbieżny do  $\pm\infty$ .

## Przykłady

- (a) Funkcja  $f$  różniczkowalna w  $x_0$  ma w tym punkcie jedyną liczbę pochodną  $f'(x_0)$ .
- (b) Funkcja  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := |x|$ , ma w punkcie 0 dwie liczby pochodne:  $-1$  oraz  $1$ .
- (c) Dla funkcji  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sqrt{x} \sin(1/x) & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}$$

każdy element  $\alpha \in [-\infty, \infty]$  jest liczbą pochodną w punkcie 0. Wykazać to (ćwiczenie).

Założmy, że funkcja rzeczywista  $f$  na przedziale  $I := [a, b]$  jest ściśle rosnąca i różniczkowalna. Wtedy  $f' \geq 0$  na  $I$ . Jeśli ponadto  $f' < p$  na  $I$ , to z twierdzenia Lagrange'a łatwo wynika, że  $f(b) - f(a) \leq p(b - a)$ . Inaczej mówiąc,  $\lambda(f[I]) \leq p\lambda(I)$ . Poniższy lemat przenosi tę obserwację do ogólniejszej sytuacji, gdy rozważamy liczby pochodne.

**Lemat 4.1.** *Niech funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ściśle rosnąca i niech  $p \in \mathbb{R}$  oraz  $E \subset [a, b]$ . Jeśli w każdym punkcie  $x \in E$  istnieje liczba pochodna  $Df(x) < p$ , to  $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$ .*

*Dowód.* Niech  $\varepsilon > 0$ . Z definicji miary zewnętrznej Lebesgue'a znajdziemy ograniczony zbiór otwarty  $G$  taki, że  $E \subset G$  oraz

$$\lambda(G) < \lambda^*(E) + \varepsilon. \quad (4.6)$$

Korzystając z definicji zbioru  $E$ , dla każdego  $x_0 \in E$  wybierzmy ciąg  $(h_n)$  o wyrazach niezerowych taki, że  $h_n \rightarrow 0$  oraz dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} < p. \quad (4.7)$$

Dla  $n \in \mathbb{N}$  oznaczmy

$$I_n(x_0) := \begin{cases} [x_0, x_0 + h_n], & \text{gdy } h_n > 0 \\ [x_0 + h_n, x_0], & \text{gdy } h_n < 0 \end{cases}$$

$$J_n(x_0) := \begin{cases} [f(x_0), f(x_0 + h_n)], & \text{gdy } h_n > 0 \\ [f(x_0 + h_n), f(x_0)], & \text{gdy } h_n < 0. \end{cases}$$

Możemy dodatkowo założyć, że wszystkie przedziały  $I_n(x_0)$  są zawarte w  $G$ . Ponieważ funkcja  $f$  jest ściśle rosnąca, więc  $f[I_n(x_0)] \subset J_n(x_0)$  oraz  $J_n(x_0)$  jest przedziałem

niezdegenerowanym. Oczywiście  $\lambda(I_n(x_0)) = |h_n|$  oraz  $\lambda(J_n(x_0)) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|$ , więc z (4.7) wynika, że

$$\lambda(J_n(x_0)) < p\lambda(I_n(x_0)). \quad (4.8)$$

Skoro  $h_n \rightarrow 0$ , to  $\lambda(I_n(x_0)) \rightarrow 0$ , a zatem z (4.8) mamy  $\lambda(J_n(x_0)) \rightarrow 0$ . Zatem rodzina przedziałów  $\mathcal{F} := \{J_n(x_0) : x_0 \in E, n \in \mathbb{N}\}$  pokrywa zbiór  $f[E]$  w sensie Vitalego. Na mocy twierdzenia Vitalego wybierzmy przeliczalną podrodziną  $\mathcal{F}' := \{J_{n_i}(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$  rodziny  $\mathcal{F}$  złożoną z przedziałów parami rozłącznych i taką, że

$$\lambda\left(f[E] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i)\right) = 0. \quad (4.9)$$

Stosując (4.9), otrzymujemy

$$\lambda^*(f[E]) \leq \lambda^*\left(f[E] \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_{n_i}(x_i)). \quad (4.10)$$

Ponieważ  $f$  jest funkcją ściśle rosnącą, więc przedziały  $I_{n_i}(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , tworzą rodzinę rozłączną (gdyby dwa różne przedziały tej postaci się przecinały, to odpowiednie przedziały rodziny  $\mathcal{F}'$  też by się przecinały). Stąd i ze wzoru (4.6) wnioskujemy, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)) = \lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) \leq \lambda(G) < \lambda^*(E) + \varepsilon. \quad (4.11)$$

Łącząc (4.10), (4.8) i (4.11), mamy  $\lambda^*(f[E]) < p(\lambda^*(E) + \varepsilon)$ . Stąd i z dowolności  $\varepsilon > 0$  wynika, że  $\lambda^*(f[E]) < p\lambda^*(E)$ .  $\square$

W podobny sposób wykazuje się, że zachodzi następujący lemat.

**Lemat 4.2.** *Niech funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ściśle rosnąca i niech  $q \geq 0$  oraz  $E \subset [a, b]$ . Jeśli w każdym punkcie  $x \in E$  istnieje liczba pochodna  $Df(x) > q$ , to  $\lambda^*(f[E]) \geq q\lambda^*(E)$ .*

**Twierdzenie 4.2** (o różniczkowalności prawie wszędzie). *Każda funkcja rzeczywista monotoniczna na  $[a, b]$  jest różniczkowalna prawie wszędzie.*

*Dowód.* Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest niemalejąca. Zastępując ją przez funkcję  $\text{id} + f$ , możemy dodatkowo przyjąć, że rozważana funkcja jest rosnąca (obie funkcje  $f$ ,  $\text{id} + f$  mają te same punkty różniczkowalności).

Niech  $E$  oznacza zbiór punktów przedziału  $[a, b]$ , w których funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna. Oznaczmy przez  $E_\infty$  zbiór tych  $x \in [a, b]$ , że  $\infty$  jest liczbą pochodną funkcji

$f$  w punkcie  $x$ . Dla  $p, q \in \mathbb{Q}$  przez  $E_{pq}$  oznaczmy zbiór tych  $x \in [a, b]$ , że istnieją liczby pochodne  $D_1f(x)$ ,  $D_2f(x)$ , dla których zachodzi  $D_1f(x) < p < q < D_2f(x)$ . Oczywiście w każdym punkcie  $x \in [a, b]$  iloraz różnicowy funkcji  $f$  jest dodatni. Zatem wszystkie liczby pochodne funkcji  $f$  w punktach zbioru  $E$  są nieujemne. Jeśli  $x \in E$ , tzn.  $f$  nie jest różniczkowalna w  $x$ , to  $\infty$  jest liczbą pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x$  lub istnieją dwie różne (nieujemne) liczby pochodne funkcji  $f$  w punkcie  $x$ . Zatem  $x \in E_\infty \cup \bigcup_{p, q \in \mathbb{Q}_+} E_{pq}$ , gdzie  $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ . Wystarczy więc wykazać, że  $\lambda(E_\infty) = 0$  oraz  $\lambda(E_{pq}) = 0$  dla  $p, q \in \mathbb{Q}_+$ .

Rozważmy zbiór  $E_\infty$ . Mamy  $f[E_\infty] \subset [f(a), f(b)]$ , więc stosując Lemat 4.2, gdy  $Df(x) = \infty > q \in \mathbb{N}$  dla  $x \in E_\infty$ , otrzymujemy

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad q\lambda^*(E_\infty) \leq \lambda^*(f[E_\infty]) \leq f(b) - f(a) < \infty.$$

Stąd  $\lambda^*(E_\infty) = 0$ , bo  $0 \leq \lambda^*(E_\infty) \leq (f(b) - f(a))/q \rightarrow 0$ , gdy  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \rightarrow \infty$ .

Rozważmy zbiór  $E_{pq}$  dla  $p, q \in \mathbb{Q}_+$ . Wtedy  $0 < p < q$  oraz na mocy Lematów 4.1 i 4.2 otrzymujemy

$$q\lambda^*(E_{pq}) \leq \lambda^*(f[E_{pq}]) \leq p\lambda^*(E_{pq}).$$

Ponieważ  $p < q$ , więc powyższe nierówności implikują, że  $\lambda^*(E_{pq}) = 0$ . □

Z Twierdzenia 4.2 oraz twierdzenia Jordana wynika

**Wniosek 4.1.** *Każda funkcja o wahanii skończonym na  $[a, b]$  jest różniczkowalna prawie wszędzie.*

Tezy Twierdzenia 4.2 nie daje się wzmocnić. Istotnie, dla każdego zbioru  $E \subset [a, b]$  miary zero można skonstruować funkcję ciągłą ściśle rosnącą  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $f'(x) = \infty$  dla każdego  $x \in E$ . (Por. Twierdzenie 7.6 w monografii [7].)

**Twierdzenie 4.3.** *Niech funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie niemalejąca. Wtedy jej pochodna  $f'$ , określona prawie wszędzie na  $[a, b]$ , jest funkcją mierzalną oraz*

$$\int_{[a, b]} f' d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

*Dowód.* Rozszerzamy funkcję  $f$  na przedział  $[a, b + 1]$ , przyjmując  $f(x) := f(b)$  dla  $x \in (b, b + 1]$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  niech

$$f_n(x) := \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad \text{gdy } x \in [a, b].$$

Funkcje  $x \mapsto f(x + 1/n)$  oraz  $x \mapsto f(x)$  są niemalejące i wiadomo, że każda funkcja monotoniczna na przedziale jest borelowska. Zatem funkcje  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są mierzalne.

Ponadto  $f_n(x) \rightarrow f'(x)$  dla każdego punktu  $x$  różniczkowalności funkcji  $f$ . Stąd i z Twierdzenia 4.2 wnioskujemy, że  $f_n \rightarrow f'$  prawie wszędzie na  $[a, b]$  oraz funkcja  $f'$  jest mierzalna. Na mocy lematu Fatou mamy

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n d\lambda \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[a,b]} f_n d\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( n \int_a^b \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) dx \right). \quad (4.12)$$

Ostatnia całka po prawej stronie jest całką Riemanna, bo funkcja podcałkowa jest różnicą funkcji monotonicznych. Stosując podstawienie  $t = x + 1/n$ , otrzymujemy

$$\int_a^b f \left( x + \frac{1}{n} \right) dx = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx,$$

a więc

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) dx &= \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx \\ &= \frac{1}{n} f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Zatem na mocy (4.12) mamy

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( n \int_a^b \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) dx \right) \leq f(b) - f(a).$$

□

W powyższym twierdzeniu nierówności nie można zastąpić równością, bo funkcja Cantora  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ma pochodną równą 0 prawie wszędzie, więc  $\int_0^1 f' d\lambda = 0 < 1 = f(1) - f(0)$ . Odnotujmy, że z Twierdzenia 4.3 i twierdzenia Jordana wynika, że pochodna funkcji o wahaniu skończonym na  $[a, b]$  jest całkowalna.





## Rozdział 5

# Funkcje absolutnie ciągłe

### 5.1 Definicja, podstawowe własności

Przez  $NZS[a, b]$  oznaczamy zbiór wszystkich skończonych rodzin postaci  $\{[a_i, b_i] : i \leq n\}$  przedziałów zawartych w  $[a, b]$  i nie zachodzących na siebie, tzn. takich że dowolne dwa przedziały rodziny mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

**Definicja 5.1.** Mówimy, że funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest absolutnie ciągła, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \{[a_i, b_i] : i \leq n\} \in NZS[a, b] \quad \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

W powyższym warunku nierówności  $<$  mogą być zastąpione nierównościami  $\leq$ .

**Uwaga 5.1.** Z definicji wynika, że każda funkcja absolutnie ciągła jest jednostajnie ciągła. Odwrotnie być nie musi, co pokazuje funkcja Cantora (to, że nie jest ona absolutnie ciągła, uzasadnimy później). Rodzina funkcji absolutnie ciągłych na  $[a, b]$  jest zamknięta względem dodawania i mnożenia, zatem stanowi przestrzeń liniową i algebra (ćwiczenie).

**Twierdzenie 5.1.** *Każda funkcja absolutnie ciągła na  $[a, b]$  ma wahanie skończone.*

*Dowód.* Weźmy  $\varepsilon := 1$  w definicji absolutnej ciągłości  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dobierzmy odpowiednią liczbę  $\delta > 0$  i rozważmy podział przedziału  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

o średnicy  $< \delta$ . Ustalmy dowolny przedział  $[x_{i-1}, x_i]$ , gdy  $1 \leq i \leq n$ , i zauważmy, że

$$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq 1. \tag{5.1}$$

Istotnie, jeśli  $x_{i-1} = t_0 < t_1 < \dots < t_n = x_i$  jest dowolnym podziałem przedziału  $[x_{i-1}, x_i]$ , to  $\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) < \delta$ , więc z doboru  $\delta$  mamy  $\sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| < 1$ . Stąd i z dowolności powyższego podziału wynika (5.1).

Następnie, korzystając z addytywności wahania względem przedziału, otrzymujemy

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^k \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq k \cdot 1 = k < \infty.$$

□

**Uwaga 5.2.** Odnotujmy następujące obserwacje.

1. Istnieją funkcje o wahanu skończonym, które nie są absolutnie ciągłe (np. funkcje nieciągłe o wahanu skończonym).
2. Istnieją funkcje ciągłe, które nie są absolutnie ciągłe (np. funkcje ciągłe o wahanu nieskończonym).
3. Istnieje funkcja ciągła monotoniczna, która nie jest absolutnie ciągła (np. funkcja Cantora).
4. Każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest absolutnie ciągła. Istotnie, niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L > 0$ . Niech  $\varepsilon > 0$  i połóżmy  $\delta := \varepsilon/L$ . Wtedy dla dowolnej rodziny  $\{[a_i, b_i]: i \leq n\} \in NZS[a, b]$  takiej, że  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$  mamy  $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq L \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$ .
5. Istnieje funkcja absolutnie ciągła, która nie spełnia warunku Lipschitza. Taką funkcją jest  $f(x) := \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Nie spełnia ona warunku Lipschitza, bo biorąc dowolną liczbę  $L > 0$ , dobierzemy  $x_0 := 0$  oraz  $x_1 \in (0, 1]$  takie, że  $|f(x_1) - f(x_0)| > L|x_1 - x_0|$ . Wystarczy dobrać  $x_1$  tak, by  $\sqrt{x_1} < 1/L$  (jest to możliwe, bo  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ ). Wtedy  $1/\sqrt{x_1} > 1$ , więc

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \sqrt{x_1} > Lx_1 = L|x_1 - x_0|.$$

Dla dowodu absolutnej ciągłości funkcji  $f$  niech  $\varepsilon \in (0, 1)$  i połóżmy  $\delta := \varepsilon^2/2$ . Niech  $\{[a_i, b_i]: i \leq n\} \in NZS[0, 1]$  będzie taką rodziną, że  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ . Załóżmy dodatkowo, że  $a_i < b_i \leq a_{i+1} < b_{i+1}$  dla  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Możemy też założyć, że istnieje  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , dla którego  $b_k \leq \varepsilon^2/4 \leq a_{k+1}$ . (Gdyby  $\varepsilon^2/4 \in (a_i, b_i)$ , to możemy podzielić  $(a_i, b_i)$  na dwa przedziały  $(a_i, \varepsilon^2/4)$  oraz  $(\varepsilon^2/4, b_i)$ .) Wtedy

$$\sum_{i=1}^n (\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}) = \sum_{i=1}^k (\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}) + \sum_{i=k+1}^n (\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}) \leq \sqrt{b_k} + \sum_{i=k+1}^n \frac{b_i - a_i}{2\sqrt{t_i}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2/4}} \sum_{i=k+1}^n (b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

przy czym  $t_i \in (a_i, b_i)$  dla  $i \in \{k+1, \dots, n\}$  są punktami otrzymanymi przez zastosowanie twierdzenia Lagrange'a do funkcji  $f$  na przedziałach  $[a_i, b_i]$  (mamy  $t_i \geq a_{k+1} \geq \varepsilon^2/4$ , więc  $1/\sqrt{t_i} \leq 1/\sqrt{\varepsilon^2/4}$ ).

Odnajmy jeszcze jedną własność funkcji absolutnie ciągłych.

**Twierdzenie 5.2.** *Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest absolutnie ciągła, to  $f$  przekształca zbiory miary zero na zbiory miary zero.*

*Dowód.* Niech  $E$  będzie podzbiorem  $[a, b]$  miary zero. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że  $E \subset (a, b)$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  według definicji absolutnej ciągłości funkcji  $f$ . Niech  $U \subset (a, b)$  będzie zbiorem otwartym takim, że  $E \subset U$  oraz  $\lambda(U) < \delta$ . Zbiór  $U$  ma postać sumy  $\bigcup_k (a_k, b_k)$  ciągu skończonego lub nieskończonego przedziałów otwartych parami rozłącznych. Załóżmy bardziej złożony przypadek, gdy jest to ciąg nieskończony. Ponieważ funkcja  $f$  na przedziale  $[a_k, b_k]$  osiąga swoje kresy i ma własność Darboux, więc istnieje przedział  $[c_k, d_k] \subset [a_k, b_k]$  taki, że  $\lambda(f[[a_k, b_k]]) = \lambda(f[[c_k, d_k]]) = |f(d_k) - f(c_k)|$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $\sum_{k=1}^n (d_k - c_k) \leq \lambda(U) < \delta$ . Zatem  $\sum_{k=1}^n |f(d_k) - f(c_k)| < \varepsilon$ . Stąd dla  $n \rightarrow \infty$  mamy  $\sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| \leq \varepsilon$ , a więc

$$\lambda^*(f[E]) \leq \lambda^*(f[U]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f[[a_k, b_k]]) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f[[c_k, d_k]]) = \sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| \leq \varepsilon.$$

Z dowolności  $\varepsilon > 0$  dostajemy  $\lambda(f[E]) = 0$ . □

**Definicja 5.2.** Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  przekształca zbiory miary zero na zbiory miary zero, to mówimy, że spełnia ona warunek (N) Łuzina.

Funkcja Cantora  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  nie spełnia warunku (N) Łuzina, zatem nie jest absolutnie ciągła. Funkcja ta odwzorowuje zbiór Cantora, który jest miary zero, na cały przedział  $[0, 1]$ .

**Wniosek 5.1.** *Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest absolutnie ciągła, to  $f$  przekształca zbiory mierzalne na zbiory mierzalne.*

*Dowód.* Niech  $E \subset [a, b]$  będzie zbiorem mierzalnym. Zatem  $E = K \cup A$ , gdzie  $K$  jest typu  $F_\sigma$  oraz  $\lambda(A) = 0$ . Niech  $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , gdzie zbiory  $K_n$  są domknięte i jako ograniczone - zwarte. Ponieważ funkcja  $f$  jest ciągła, więc obraz  $f[K_n]$  jest zbiorem zwartym dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Zatem  $f[K] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f[K_n]$  jest typu  $F_\sigma$ , zaś z Twierdzenia 5.2 wynika, że zbiór  $f[A]$  jest miary zero. Stąd  $f[E] = f[K] \cup f[A]$  jest zbiorem mierzalnym. □

**Uwaga 5.3.** Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale, to jej obraz zbioru mierzalnego nie musi być zbiorem mierzalnym. Istotnie, niech  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  będzie funkcją Cantora i niech  $V \subset [0, 1]$  będzie niemierzalnym zbiorem Vitalego. Wtedy  $A := V \setminus \mathbb{Q}$  jest niemierzalny oraz  $B := f^{-1}[A] \subset C$ , gdzie  $C$  jest zbiorem Cantora. Wówczas zbiór  $B$  jest miarą zero, więc mierzalny oraz zbiór  $A = f[f^{-1}[A]] = f[B]$  jest niemierzalny.

Następująca własność całki Lebesgue'a jest zwana absolutną ciągłością całki.

**Twierdzenie 5.3.** *Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowna w sensie Lebesgue'a na  $[a, b]$ , to dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla każdego mierzalnego zbioru  $E \subset [a, b]$  takiego, że  $\lambda(E) < \delta$  zachodzi  $\int_E |f| d\lambda < \varepsilon$ .*

*Dowód.* Niech  $\varepsilon > 0$ . Z definicji całki  $\int_{[a,b]} |f| d\lambda$  wynika, że istnieje funkcja prosta  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że  $0 \leq u \leq |f|$  na  $[a, b]$  oraz  $\int_{[a,b]} u d\lambda > \int_{[a,b]} |f| d\lambda - \varepsilon/2$ . Funkcja prosta  $u$  jest ograniczona – załóżmy, że  $M > 0$  oraz  $u(x) \leq M$  dla każdego  $x \in [a, b]$ . Niech  $\delta := \varepsilon/(2M)$ . Rozważmy dowolny zbiór mierzalny  $E \subset [a, b]$  taki, że  $\lambda(E) < \delta$ . Wtedy

$$\int_E u d\lambda \leq M\lambda(E) < M\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem

$$\int_E |f| d\lambda = \int_E (|f| - u) d\lambda + \int_E u d\lambda \leq \int_{[a,b]} (|f| - u) d\lambda + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Wniosek 5.2.** *Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowna w sensie Lebesgue'a na  $[a, b]$ , to funkcja  $F(x) := \int_{[a,x]} f d\lambda$ ,  $x \in [a, b]$ , jest absolutnie ciągła.*

*Dowód.* Dobierzmy do  $\varepsilon > 0$  liczbę  $\delta > 0$  jak w Twierdzeniu 5.3. Rozważmy rodzinę  $\{[a_i, b_i] : i \leq n\} \in NZS[a, b]$  taką, że  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ . Przyjmując  $E := \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$  w Twierdzeniu 5.3, mamy  $\int_E |f| d\lambda < \varepsilon$ , czyli  $\sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} |f| d\lambda < \varepsilon$ . Zauważmy, że

$$|F(b_i) - F(a_i)| = \left| \int_{[a,b_i]} f d\lambda - \int_{[a,a_i]} f d\lambda \right| = \left| \int_{[a_i, b_i]} f d\lambda \right|,$$

więc

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{[a_i, b_i]} f d\lambda \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} |f| d\lambda < \varepsilon.$$

□

## 5.2 Twierdzenie Banacha-Zareckiego

Ciągłość, skończone wahanie i warunek (N) Łuzina są konieczne na to, by funkcja była absolutnie ciągła na  $[a, b]$ . Okazuje się, że są one także dostateczne. Aby to pokazać, potrzebne nam będą pewne fakty pomocnicze.

**Uwaga 5.4.** (1) Dla każdego zbioru  $E \subset \mathbb{R}$  istnieje jego nadzbiór  $A$  typu  $G_\delta$  taki, że  $\lambda^*(E) = \lambda(A)$ . (Wystarczy skorzystać z definicji miary zewnętrznej  $\lambda^*$ .)

(2) Dla każdego ciągu  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  podzbiorów  $\mathbb{R}$  oraz  $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  zachodzi równość  $\lambda^*(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(E_n)$ . (Na mocy (1) znajdziemy odpowiednie nadzbiory  $A_n$  i  $A$  dla  $E_n$  i  $E$  oraz przyjmując  $B_n := A \cap \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ , należy skorzystać z tego, że  $\lambda(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n)$ .)

**Lemat 5.1.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $E \subset [a, b]$ . Jeśli istnieje liczba  $p > 0$  taka, że w każdym punkcie  $x \in E$  dowolna liczba pochodna  $Df(x)$  spełnia warunek  $|Df(x)| < p$ , to  $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$ .

*Dowód.* Niech  $\varepsilon > 0$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  połóżmy

$$E_n := \{x \in E : \forall t \in [a, b] \ (|t - x| < 1/n \Rightarrow |f(t) - f(x)| < p|t - x|)\}.$$

Zauważmy, że  $E_n \subset E_{n+1}$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$  (z założenia dotyczącego  $Df(x)$ ). Stąd  $f[E_n] \subset f[E_{n+1}]$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f[E_n] = f[E]$ . Zatem na mocy Uwagi 5.4 (2) mamy

$$\lambda^*(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(E_n) \quad \text{oraz} \quad \lambda^*(f[E]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(f[E_n]). \quad (5.2)$$

Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  wybierzmy ciąg przedziałów  $(I_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  o długości  $< 1/n$  pokrywających  $E_n$  i taki, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k^n) \leq \lambda^*(E_n) + \varepsilon. \quad (5.3)$$

Załóżmy, że  $x, x' \in E_n \cap I_k^n$ . Wtedy  $|x - x'| < 1/n$ , więc

$$|f(x) - f(x')| < p|x - x'| \leq p\lambda(I_k^n).$$

Stąd  $\lambda^*(f[E_n \cap I_k^n]) \leq \sup_{x, x' \in E_n \cap I_k^n} |f(x) - f(x')| \leq p\lambda(I_k^n)$ . Oczywiście  $f[E_n] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f[E_n \cap I_k^n]$ . Zatem na mocy (5.3) dostajemy

$$\lambda^*(f[E_n]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(f[E_n \cap I_k^n]) \leq p \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k^n) \leq p(\lambda^*(E_n) + \varepsilon).$$

Z dowolności  $n \in \mathbb{N}$ , biorąc  $n \rightarrow \infty$  i stosując (5.2), mamy

$$\lambda^*(f[E]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(f[E_n]) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} p(\lambda^*(E_n) + \varepsilon) = p(\lambda^*(E) + \varepsilon).$$

Na koniec z dowolności  $\varepsilon > 0$  otrzymujemy  $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$ .  $\square$

**Lemat 5.2.** *Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją mierzalną oraz niech  $E \subset [a, b]$  będzie zbiorem mierzalnym. Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru  $E$ , to  $\lambda^*(f[E]) \leq \int_E |f'| d\lambda$ .*

*Dowód.* Niech  $\varepsilon > 0$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  połóżmy

$$E_n := \{x \in E : (n-1)\varepsilon \leq |f'(x)| < n\varepsilon\}.$$

Pochodna funkcji mierzalnej na zbiorze mierzalnym jest funkcją mierzalną (przedstawiamy  $f'(x)$  jako granicę typu  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x+1/n) - f(x))$ ), więc zbiory  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są mierzalne. Ponadto są one parami rozłączne. Zauważmy, że  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  oraz  $f[E] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f[E_n]$ . Korzystając z Lematu 5.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lambda^*(f[E]) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f[E_n]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon\lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\varepsilon\lambda(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon\lambda(E_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f'| d\lambda + \varepsilon\lambda(E) = \int_E |f'| d\lambda + \varepsilon\lambda(E). \end{aligned}$$

Na koniec z dowolności  $\varepsilon > 0$  mamy  $\lambda^*(f[E]) \leq \int_E |f'| d\lambda$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.4** (Banacha-Zareckiego). *Funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest absolutnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła, ma wahanie skończone i spełnia warunek (N) Łuzina.*

*Dowód.* Konieczność została wykazana wcześniej. Dla dowodu dostateczności wykażemy najpierw, że

$$|f(d) - f(c)| \leq \int_{[c,d]} |f'| d\lambda \quad (5.4)$$

dla dowolnego podprzedziału  $[c, d]$  przedziału  $[a, b]$ . Niech  $E$  oznacza zbiór punktów różniczkowalności funkcji  $f$  w przedziale  $[c, d]$  i niech  $F := [c, d] \setminus E$ . Skoro  $f$  ma wahanie skończone, to  $\lambda(F) = 0$ . Z warunku (N) Łuzina wynika, że  $\lambda(f[F]) = 0$ . Ponieważ  $f$  jest ciągła, więc przedział domknięty o końcach  $f(c), f(d)$  zawiera się w  $f[[c, d]]$ . Zatem z Lematu 5.2 wnioskujemy, że

$$|f(d) - f(c)| \leq \lambda(f[[c, d]]) \leq \lambda^*(f[E]) + \lambda^*(f[F]) = \lambda^*(f[E]) \leq \int_{[c,d]} |f'| d\lambda,$$

co kończy dowód (5.4).

Ponieważ funkcja  $f$  ma wahanie skończone, więc jej pochodna  $f'$ , istniejąca prawie wszędzie, jest całkowna na  $[a, b]$ . Niech  $\varepsilon > 0$ . Z absolutnej ciągłości całki (Twierdzenie 5.3) dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  taką, że  $\int_A |f'|d\lambda < \varepsilon$  dla każdego zbioru mierzalnego  $A \subset [a, b]$  takiego, że  $\lambda(A) < \delta$ . Niech  $\{[a_i, b_i] : i \leq n\} \in NZS[a, b]$  oraz  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ . Zatem korzystając z (5.4), otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} |f'|d\lambda = \int_{\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]} |f'|d\lambda < \varepsilon,$$

bo  $\lambda(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]) < \delta$ .

□





## Rozdział 6

# Funkcje pierwszej klasy Baire'a

### 6.1 Definicja, przykłady, podstawowe własności

Mówimy, że funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest pierwszej klasy Baire'a (krótko: 1 klasy Baire'a), gdy jest ona granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych na  $[a, b]$ . Podobnie można rozważać funkcje 1 klasy Baire'a na  $\mathbb{R}$  lub na dowolnym przedziale.

Analogicznie definiuje się kolejne klasy Baire'a, np. funkcja nazywa się drugiej klasy Baire'a, gdy jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji pierwszej klasy Baire'a.

Oczywiście każda funkcja 1 klasy Baire'a jest borelowsko mierzalna. Łatwo wykazać, że suma i iloczyn dwóch funkcji 1 klasy Baire'a jest 1 klasy Baire'a. Ponadto funkcja 1 klasy Baire'a złożona (z zewnątrz lub od wewnątrz) z funkcją ciągłą pozostaje 1 klasy Baire'a (ćwiczenie).

Jest jasne, że każda funkcja ciągła jest 1 klasy Baire'a. Znane przykłady pokazują, że przy punktowym przejściu do granicy ciągu funkcji ciągłych możemy stracić ciągłość funkcji granicznej. Zatem istnieją nieciągłe funkcje 1 klasy Baire'a.

**Twierdzenie 6.1.** *Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma przeliczalny zbiór punktów nieciągłości, to jest ona 1 klasy Baire'a.*

*Dowód.* Niech  $\{t_n: n \in \mathbb{N}\}$  będzie ciągiem wszystkich punktów nieciągłości funkcji  $f$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  rozważmy podział  $P_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$  przedziału  $[a, b]$  o średnicy  $\leq 1/n$ , zawierający punkty  $t_1, \dots, t_n$ . Rozważmy funkcję ciągłą  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , której wykresem jest linia łamana o wierzchołkach  $(x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)}))$  dla  $i = 0, \dots, k_n$ . Pokażemy, że  $f_n \rightarrow f$  na  $[a, b]$ , co zakończy dowód. Niech  $x \in [a, b]$ . Rozważmy dwa przypadki:

<sup>10</sup>  $x = t_p$  dla pewnego  $p \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $x \in P_n$  dla  $n \geq p$ , zatem  $f_n(x) = f(x)$  dla  $n \geq p$ . Stąd  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

$2^0$   $x$  jest punktem ciągłości funkcji  $f$ . Znajdźmy  $i_n \in \{1, \dots, k_n\}$  takie, że  $x \in [x_{i_{n-1}}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$ . Wtedy  $x_{i_{n-1}}^{(n)} \rightarrow x$  oraz  $x_{i_n}^{(n)} \rightarrow x$ , bo  $\mu(P_n) \rightarrow 0$ . Ponieważ na przedziale  $[x_{i_{n-1}}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$  funkcja  $f_n$  jest monotoniczna, więc  $f_n(x)$  należy do przedziału o końcach  $f_n(x_{i_{n-1}}^{(n)}) = f(x_{i_{n-1}}^{(n)})$ ,  $f_n(x_{i_n}^{(n)}) = f(x_{i_n}^{(n)})$ . Z ciągłości  $f$  w  $x$  mamy  $f(x_{i_{n-1}}^{(n)}) \rightarrow f(x)$  oraz  $f(x_{i_n}^{(n)}) \rightarrow f(x)$ . Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

□

**Wniosek 6.1.** *Każda funkcja o wahanii skończonym na  $[a, b]$  jest 1 klasy Baire'a.*

**Przykład 6.1.** Opiszemy funkcję 1 klasy Baire'a, która ma nieprzeliczalny zbiór punktów nieciągłości. Niech funkcja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zeruje się na klasycznym trójkowym zbiorze Cantora  $C \subset [0, 1]$  oraz rozważmy ciąg  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  parami rozłącznych składowych dopełnienia  $[0, 1] \setminus C$ . Połóżmy  $f(x) := 1$  dla punktów będących środkami przedziałów  $A_i$ , a następnie rozszerzamy funkcję  $f$  tak, aby była ciągła i afiniczna na obu połowach przedziału domkniętego  $\text{cl}(A_i)$  (na końcach tych przedziałów funkcja się zeruje). Wówczas funkcja  $f$  jest nieciągła w każdym punkcie  $x$  zbioru Cantora, bo znajdzie się ciąg  $x_n \rightarrow x$  taki, że  $f(x_n) = 1$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Zatem ciąg  $(f(x_n))$  nie zbiega do  $f(x) = 0$ . W pozostałych punktach  $x \in [0, 1]$  funkcja  $f$  jest ciągła. Zatem jej zbiór punktów nieciągłości jest nieprzeliczalny równy  $C$ . Ponadto funkcja  $f$  jest 1 klasy Baire'a, bo dla  $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$ , funkcje  $f_n := \chi_{B_n} f$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są ciągłe oraz  $f_n \rightarrow f$  na  $[0, 1]$ .

Wykażemy teraz, że rodzina funkcji 1 klasy Baire'a na  $[a, b]$  jest zamknięta względem jednostajnego przejścia do granicy. Twierdzenie na ten temat poprzedzimy dwoma lematami.

**Lemat 6.1.** *Niech funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie 1 klasy Baire'a. Jeśli  $M > 0$  oraz  $|f(x)| \leq M$  dla każdego  $x \in [a, b]$ , to istnieje ciąg funkcji ciągłych  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zbieżny punktowo do  $f$  na  $[a, b]$ , przy czym  $|f_n(x)| \leq M$  dla każdego  $x \in [a, b]$  oraz  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Dowód.* Z założenia wynika, że istnieje ciąg funkcji ciągłych  $g_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zbieżny punktowo do  $f$  na  $[a, b]$ . Połóżmy  $f_n(x) := \max\{-M, \min\{g_n(x), M\}\}$  dla  $x \in [a, b]$  oraz  $n \in \mathbb{N}$ . Wówczas funkcje  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są ciągłe na  $[a, b]$ . Ponadto  $f_n \rightarrow f$  na  $[a, b]$ . Istotnie, niech  $x \in [a, b]$ . Jeśli  $|f(x)| < M$ , to dla dostatecznie dużych  $n$  mamy  $|g_n(x)| < M$ , więc  $f_n(x) = g_n(x) \rightarrow f(x)$ . Jeśli zaś  $|f(x)| = M$ , to dla  $\varepsilon \in (0, M)$  rozważmy  $k \in \mathbb{N}$  takie, że  $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  dla każdego  $n \geq k$ . Zatem dla  $n \geq k$  mamy  $f_n(x) \in \{g_n(x), f(x)\}$ , a więc  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Stąd  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . □

**Lemat 6.2.** Niech  $(f_k)$  będzie ciągiem funkcji 1 klasy Baire'a na  $[a, b]$  oraz  $\sum_{k \geq 1} M_k$  – szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich takim, że  $|f_k(x)| \leq M_k$  dla każdego  $x \in [a, b]$  oraz dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ . Wtedy funkcja  $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , jest poprawnie określoną funkcją 1 klasy Baire'a na  $[a, b]$ .

*Dowód.* Funkcja  $f$  jest poprawnie określona, bo szereg  $\sum_{k \geq 1} f_k(x)$  jest zbieżny dla każdego  $x \in [a, b]$  na mocy kryterium porównawczego. Skoro funkcja  $f_k$  jest 1 klasy Baire'a, to istnieje ciąg  $(g_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  funkcji ciągłych zbieżny punktowo do  $f_k$  na  $[a, b]$ . Zgodnie z Lematem 6.1 można założyć, że  $|g_n^{(k)}(x)| \leq M_k$  dla wszystkich  $x \in [a, b]$  oraz  $n \in \mathbb{N}$ .

Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  połóżmy

$$h_n := g_n^{(1)} + g_n^{(2)} + \dots + g_n^{(n)}.$$

Są to funkcje ciągłe na  $[a, b]$ . Pokażemy, że  $h_n \rightarrow f$  na  $[a, b]$ . Ustalmy  $x \in [a, b]$  oraz  $\varepsilon > 0$ . Dobierzmy  $k_0 \in \mathbb{N}$  tak, by  $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k < \varepsilon/3$ . Skoro  $g_n^{(k)}(x) \rightarrow f_k(x)$  gdy  $n \rightarrow \infty$ , to można wybrać indeks  $N > k_0$  tak, by  $|g_n^{(k)}(x) - f_k(x)| < \varepsilon/(3k_0)$  dla  $k = 1, 2, \dots, k_0$  oraz wszystkich  $n \geq N$ . Dla każdego  $n \geq N$  mamy więc

$$\begin{aligned} |h_n(x) - f(x)| &\leq \left| \sum_{k=1}^{k_0} g_n^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{k_0} f_k(x) \right| + \sum_{k=k_0+1}^n |g_n^{(k)}(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |g_n^{(k)}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |g_n^{(k)}(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k \\ &< \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{3k_0} + 2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

To oznacza, że  $h_n(x) \rightarrow f(x)$ . □

**Twierdzenie 6.2.** Niech  $(f_n)$  będzie ciągiem funkcji 1 klasy Baire'a na  $[a, b]$  zbieżnym jednostajnie do funkcji  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wtedy funkcja  $f$  jest 1 klasy Baire'a.

*Dowód.* Korzystając z jednostajnej zbieżności ciągu  $(f_n)$  do funkcji  $f$ , dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  dobierzmy  $n_k \in \mathbb{N}$  tak, aby

$$\forall x \in [a, b] \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k},$$

przy tym  $n_1 < n_2 < \dots$ . Niech  $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$  dla  $k \in \mathbb{N}$ . Są to funkcje 1 klasy Baire'a. Ponadto dla wszystkich  $x \in [a, b]$  oraz  $k \in \mathbb{N}$  mamy

$$|g_k(x)| \leq |f_{n_{k+1}}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Ponieważ szereg  $\sum_{k \geq 1} 1/2^{k-1}$  jest zbieżny, więc na mocy Lematu 6.2 funkcja  $g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k$  jest 1 klasy Baire'a. Wyliczmy  $m$ -tą sumę częściową szeregu:

$$\sum_{k=1}^m g_k = (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \cdots + (f_{n_{m+1}} - f_{n_m}) = f_{n_{m+1}} - f_{n_1}.$$

Stąd  $g = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m g_k = f - f_{n_1}$ , a więc  $f = g + f_{n_1}$  jest 1 klasy Baire'a.  $\square$

## 6.2 Charakteryzacja Lebesgue'a

Wiadomo, że funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jej przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte. Podobną charakteryzację dla funkcji 1 klasy Baire'a podał Lebesgue.

**Twierdzenie 6.3.** *Funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest 1 klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $c \in \mathbb{R}$  zbiory  $\{x: f(x) < c\}$  i  $\{x: f(x) > c\}$  są typu  $F_\sigma$  (w konsekwencji, przeciwobrazy dowolnych zbiorów otwartych są typu  $F_\sigma$ ).*

Dowód poprzedzimy trzema lematami.

**Lemat 6.3.** *Rozpatrujemy podzbiory przestrzeni metrycznej  $(X, \rho)$ .*

- (a) *Każdy zbiór domknięty jest typu  $G_\delta$ .*
- (b) *Każdy zbiór otwarty jest typu  $F_\sigma$ .*
- (c) *Różnica dwóch zbiorów domkniętych jest typu  $F_\sigma$ .*

*Dowód.* Ad (a) Jeśli  $F \subset X$  jest zbiorem domkniętym niepustym oraz  $\rho(x, F)$  oznacza odległość punktu  $x$  od zbioru  $F$ , to  $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ , gdzie  $G_n := \{x: \rho(x, F) < 1/n\}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , przy czym  $G_n$  jest zbiorem otwartym jako przeciwobraz zbioru otwartego  $(-\infty, 1/n)$  otrzymanego przez funkcję ciągłą  $x \mapsto \rho(x, F)$ ,  $x \in X$ .

Ad (b) Ta własność wynika z (a) przez przejście do dopełnień.

Ad (c) Niech zbiory  $A, B \subset X$  będą domknięte. Wtedy zbiór  $X \setminus B$  jest typu  $F_\sigma$  na mocy (b). Zatem zbiór  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$  jest typu  $F_\sigma$  jako przecięcie dwóch zbiorów typu  $F_\sigma$ .  $\square$

**Lemat 6.4.** *Niech  $(X, \rho)$  będzie przestrzenią metryczną. Jeśli  $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ , gdzie zbiory  $E_i \subset X$  są typu  $F_\sigma$ , to istnieją zbiory parami rozłączne  $B_1, \dots, B_n$  typu  $F_\sigma$  takie, że  $B_i \subset E_i$  dla  $i = 1, \dots, n$  oraz  $E = \bigcup_{i=1}^n B_i$ .*

*Dowód.* Skoro  $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$  oraz zbiory  $E_i \subset X$  są typu  $F_\sigma$ , to  $E$  jest typu  $F_\sigma$ . Zatem  $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ , gdzie każdy zbiór  $F_k$  jest domknięty i zawarty w odpowiednim zbiorze  $E_i$ . Niech  $D_1 := F_1$  oraz  $D_{k+1} := F_{k+1} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_k)$  dla  $k \in \mathbb{N}$ . Na mocy Lematu 6.3 (c) zbiory  $D_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , są typu  $F_\sigma$ . Ponadto są one parami rozłączne oraz  $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$ . Niech  $B_i := \bigcup \{D_k : k \in \mathbb{N}, D_k \subset E_i\}$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Wtedy zbiory  $B_i$  są typu  $F_\sigma$ , parami rozłączne oraz  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = E$ .  $\square$

**Lemat 6.5.** *Załóżmy, że funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma skończony zbiór wartości*

$$c_1 < c_2 < \dots < c_n.$$

*Jeśli każdy zbiór  $\{x: f_k(x) = c_k\}$  (dla  $k = 1, \dots, n$ ) jest typu  $F_\sigma$ , to funkcja  $f$  jest 1 klasy Baire'a.*

*Dowód.* Dla  $k = 1, \dots, n$  niech

$$\{x: f(x) = c_k\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^{(k)}, \quad (6.1)$$

gdzie zbiory  $F_i^{(k)}$  są domknięte. Ustalmy dowolną liczbę  $m \in \mathbb{N}$ . Połóżmy

$$D_m^{(k)} := \bigcup_{i=1}^m F_i^{(k)} \quad \text{dla } k = 1, \dots, n \quad \text{oraz} \quad D_m := \bigcup_{k=1}^n D_m^{(k)}.$$

Następnie określmy funkcję  $f_m: D_m \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$f_m(x) := c_k, \quad \text{gdy } x \in D_m^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że wszystkie zbiory rodziny  $\{D_m^{(k)}: k \in \{1, \dots, n\}\}$  są domknięte i parami rozłączne. Zatem funkcja  $f_m$  jest poprawnie określona i ciągła na  $D_m$ . Funkcję  $f_m$  można rozszerzyć do funkcji ciągłej  $g_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , przy czym  $\max_{x \in D_m} |f_m(x)| = \max_{x \in [a, b]} |g_m(x)|$ . Istotnie, przedstawmy  $(a, b) \setminus D_m$  jako sumę przeliczalnej rodziny parami rozłącznych przedziałów  $(s_j, t_j)$ . Następnie konstruujemy funkcję  $g_m$  jako afiniczną na każdym przedziale  $[s_j, t_j]$ .

Dla zakończenia dowodu pokażemy, że  $g_m \rightarrow f$  na  $[a, b]$ . Niech  $x \in [a, b]$ . Istnieje dokładnie jedna liczba  $k \in \{1, \dots, n\}$  taka, że  $f(x) = c_k$ . Korzystając z (6.1), wybierzmy indeks  $i_0 \in \mathbb{N}$  taki, że  $x \in F_{i_0}^{(k)}$ . Dla  $m \geq i_0$  mamy  $x \in D_m^{(k)}$ . Zatem  $f_m(x) = c_k$  dla  $m \geq i_0$ . Tym samym  $g_m(x) = c_k$  dla  $m \geq i_0$ , bo  $g_m$  jest rozszerzeniem funkcji  $f_m$ . Skoro  $g_m(x) = c_k = f(x)$  dla  $m \geq i_0$ , to  $g_m(x) \rightarrow f(x)$ .  $\square$

Możemy teraz przeprowadzić dowód Twierdzenia 6.3.

*Dowód. Konieczność.* Niech  $(f_n)$  będzie ciągiem funkcji ciągłych na  $[a, b]$  zbieżnym punktowo do funkcji  $f$ . Rozważmy zbiór  $\{x: f(x) < c\}$  i zauważmy, że

$$\{x: f(x) < c\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \left\{ x: f_n(x) \leq c - \frac{1}{k} \right\}. \quad (6.2)$$

Istotnie, jeśli  $f(x) < c$ , to istnieje liczba  $k \in \mathbb{N}$  taka, że  $f(x) < c - 1/k$ , a także  $f_n(x) < c - 1/k$  dla prawie wszystkich  $n$ , tzn. dla  $n \geq p$ , gdzie  $p$  jest pewną liczbą naturalną. Odwrotnie, jeśli istnieją liczby  $k, p \in \mathbb{N}$  takie, że  $f_n(x) \leq c - 1/k$  dla wszystkich  $n \geq p$ , to po przejściu go granicy, gdy  $n \rightarrow \infty$  mamy  $f(x) \leq c - 1/k < c$ .

Z ciągłości  $f_n$  wynika, że zbiory  $\{x: f_n(x) \leq c - 1/k\}$  są domknięte. Stąd i z (6.2) wnioskujemy, że zbiór  $\{x: f(x) < c\}$  jest typu  $F_\sigma$ . Analogicznie pokazujemy, że zbiór  $\{x: f(x) > c\}$  jest typu  $F_\sigma$ .

**Dostateczność.** Na początek założymy dodatkowo, że funkcja  $f$  jest ograniczona i niech  $m < f(x) < M$  dla wszystkich  $x \in [a, b]$ . Ustalmy  $n \in \mathbb{N}$ . Podzielmy przedział  $[m, M]$  na  $n$  równych części punktami

$$m = c_0 < c_1 < \dots < c_n = M, \quad \text{gdzie } c_{k+1} - c_k = \frac{M - m}{n} \quad \text{dla } k = 0, \dots, n - 1.$$

Położmy

$$A_k := \{x: c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}\} \quad \text{dla } k = 1, \dots, n - 1$$

$$\text{oraz } A_0 := \{x: f(x) < c_1\}, \quad A_n := \{x: f(x) > c_{n-1}\}.$$

Z założenia wynika, że wszystkie zbiory  $A_i$  są typu  $F_\sigma$  oraz widać, że  $[a, b] = \bigcup_{i=0}^n A_i$ . Na mocy Lematu 5.2 istnieje rozkład  $[a, b] = \bigcup_{i=0}^n B_i$ , gdzie zbiory  $B_i$  są parami rozłączne typu  $F_\sigma$  oraz  $B_i \subset A_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ . Określmy funkcję  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem  $f_n := \sum_{i=0}^n c_i \chi_{B_i}$ . Na mocy Lematu 6.5 funkcja  $f_n$  jest 1 klasy Baire'a. Pokażemy, że ciąg  $(f_n)$  zbiega jednostajnie do  $f$  na  $[a, b]$ , co zakończy dowód w myśl Twierdzenia 6.2.

Niech  $\varepsilon > 0$  i wybierzmy  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, by  $(M - m)/n_0 < \varepsilon$ . Niech  $n \geq n_0$  oraz  $x \in [a, b]$ . Istnieje dokładnie jedna liczba  $k \in \{1, \dots, n\}$  taka, że  $x \in B_k \subset A_k$ . Wtedy  $f_n(x) = c_k$ . Ponadto  $c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}$ , gdy  $k \neq 0, k \neq n$  i odpowiednio  $f(x) < c_1$ , gdy  $k = 0$  oraz  $f(x) > c_{n-1}$ , gdy  $k = n$ . Zatem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{M - m}{n} \leq \frac{M - m}{n_0} < \varepsilon$$

dla wszystkich  $x \in [a, b]$  oraz  $n \geq n_0$ . Wobec tego  $(f_n)$  zbiega jednostajnie do  $f$  na  $[a, b]$ .

Rozważmy teraz ogólny przypadek, gdy funkcja  $f$  może być nieograniczona. Położmy  $g(x) := \arctan f(x)$  dla  $x \in [a, b]$ . Funkcja  $g$  jest ograniczona. Zauważmy, że jeśli  $c \in (-\pi/2, \pi/2)$ , to  $\{x: g(x) > c\} = \{x: f(x) > \tan c\}$ . Jeśli  $c \geq \pi/2$ , to  $\{x: g(x) > c\} = \emptyset$ ,

zaś jeśli  $c \leq -\pi/2$ , to  $\{x: g(x) > c\} = [a, b]$ . Zatem we wszystkich przypadkach zbiór  $\{x: g(x) > c\}$  jest typu  $F_\sigma$ . Podobnie pokazujemy, że zbiór  $\{x: g(x) < c\}$  jest typu  $F_\sigma$ . Zatem z poprzedniej części dowodu wynika, że funkcja  $g$  jest 1 klasy Baire'a.

Wywnioskujmy na koniec, że funkcja  $f(x) = \tan(g(x))$ ,  $x \in [a, b]$ , też jest 1 klasy Baire'a. Istotnie, niech  $g_n \rightarrow g$  na  $[a, b]$ , gdzie funkcje  $g_n$  są ciągłe. Zastępując ewentualnie  $g_n$  przez

$$\min \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \max \left\{ g_n, -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right\} \right\},$$

można założyć, że  $g_n(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$  dla  $x \in [a, b]$ . Wtedy  $\tan(g_n) \rightarrow f$  na  $[a, b]$ , przy czym funkcje  $\tan(g_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są oczywiście ciągłe. Zatem  $f$  jest 1 klasy Baire'a.  $\square$

**Wniosek 6.2.** *Funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest 1 klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego  $U \subset \mathbb{R}$  przeciwobraz  $f^{-1}[U]$  jest zbiorem typu  $F_\sigma$ .*

*Dowód.* Ćwiczenie.  $\square$

**Twierdzenie 6.4** (Baire'a). *Jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest 1 klasy Baire'a, to jej zbiór punktów nieciągłości jest pierwszej kategorii typu  $F_\sigma$ .*

*Dowód.* Niech  $(U_n)$  będzie różnowartościowym ciągiem, którego wyrazami są wszystkie przedziały otwarte w  $\mathbb{R}$  o końcach wymiernych. Rodzina tych przedziałów tworzy bazę topologii w  $\mathbb{R}$ . Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją 1 klasy Baire'a. Pokażemy, że zbiór  $D(f)$  wszystkich punktów nieciągłości funkcji  $f$  ma postać

$$D(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(f^{-1}[U_n])). \quad (6.3)$$

Jeśli  $x \in D(f)$ , to istnieje zbiór  $U_n$  taki, że  $f(x) \in U_n$  oraz nie istnieje otoczenie  $V$  punktu  $x$  takie, że  $f[V] \subset U_n$ . Stąd  $x \in f^{-1}[U_n]$  oraz  $x \notin \text{Int}(f^{-1}[U_n])$ . (Gdyby  $x \in \text{Int}(f^{-1}[U_n])$ , to istniałoby otoczenie  $V$  punktu  $x$  takie, że  $V \subset f^{-1}[U_n]$ . Stąd  $f[V] \subset f[f^{-1}[U_n]] \subset U_n$ , sprzeczność.)

Odwrotnie, jeśli istnieje zbiór  $U_n$  taki, że  $x \in f^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(f^{-1}[U_n])$ , to  $U_n$  jest otoczeniem punktu  $f(x)$  takim, że żadne otoczenie  $V$  punktu  $x$  nie spełnia warunku  $f[V] \subset U_n$ , co oznacza, że  $x \in D(f)$ . (Gdyby takie otoczenie  $V$  istniało, to  $V \subset f^{-1}[f[V]] \subset f^{-1}[U_n]$  i mielibyśmy  $x \in \text{Int}(f^{-1}[U_n])$ , sprzeczność.) Dotychczas nie korzystaliśmy z tego, że  $f$  jest 1 klasy Baire'a.

Skoro funkcja  $f$  jest 1 klasy Baire'a, to z Wniosku 6.2 wynika, że każdy zbiór  $f^{-1}[U_n]$  jest typu  $F_\sigma$ . Zatem każdy zbiór  $f^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(f^{-1}[U_n])$  też jest typu  $F_\sigma$ . W konsekwencji na mocy (6.3) zbiór  $D(f)$  jest typu  $F_\sigma$ . Ponadto zbiór  $D(f)$  jest brzegowy, bo gdyby przedział otwarty był zawarty w  $f^{-1}[U_n]$ , to byłby on też zawarty w  $\text{Int}(f^{-1}[U_n])$ . Zbiór  $D(f)$  jako brzegowy typu  $F_\sigma$  jest pierwszej kategorii.  $\square$



**Wniosek 6.3.** *Zbiór punktów ciągłości dowolnej funkcji 1 klasy Baire'a  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest gęsty.*

*Dowód.* Z poprzedniego twierdzenia wynika, że zbiór  $D(f)$  jest pierwszej kategorii. Zatem na mocy twierdzenia Baire'a o kategorii zbiór  $D(f)$  jest brzegowy. Stąd jego dopełnienie jest zbiorem gęstym.  $\square$

Na koniec pokażemy, że funkcja o gęstym zbiorze punktów ciągłości nie musi być 1 klasy Baire'a.

**Przykład 6.2.** Rozważmy klasyczny zbiór Cantora  $C \subset [0, 1]$  oraz przeliczalny zbiór  $A$  końców składowych dopełnienia  $[0, 1] \setminus C$ . Wtedy  $A$  jest gęstym podzbiorem  $C$  typu  $F_\sigma$ . Niech  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją charakterystyczną zbioru  $A$ . Wtedy funkcja  $f$  jest ciągła w każdym punkcie zbioru  $[0, 1] \setminus C$ , więc ma ona gęsty zbiór punktów ciągłości. Przypuśćmy, że  $f$  jest 1 klasy Baire'a. Stosując Wniosek 6.2 (po przejściu do dopełnień), wnioskujemy że zbiór  $f^{-1}[\{1\}] = A$  jest typu  $G_\delta$ . To jest jednak niemożliwe. Istotnie, zbiór  $A$  jako gęsty podzbiór przestrzeni  $C$  typu  $G_\delta$  byłby rezydualny w tej przestrzeni – na mocy twierdzenia Baire'a o kategorii. Zatem zbiór  $C \setminus A$  byłby brzegowy typu  $F_\sigma$ , więc pierwszej kategorii w przestrzeni  $C$ . Wtedy przestrzeń  $C = A \cup (C \setminus A)$  byłaby pierwszej kategorii wbrew twierdzeniu Baire'a o kategorii.

# Rozdział 7

## Zestaw zadań

### 7.1 Wahanie funkcji

**Zadanie 7.1.** Wykazać własności (c), (d) podane w Twierdzeniu 2.3.

**Zadanie 7.2.** Wykazać, że jeśli funkcja  $f$  ma wahanie skończone na  $[a, b]$ , to funkcja  $f^2$  też ma wahanie skończone na  $[a, b]$ .

**Zadanie 7.3.** Niech  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x^\alpha \sin(1/x) & \text{dla } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Dla jakich wartości  $\alpha \in \mathbb{R}$  funkcja  $f$  ma wahanie skończone na  $[0, 1]$ ?

**Zadanie 7.4.** Podać przykład funkcji różniczkowalnej  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (w punktach 0, 1 rozważamy pochodne jednostronne) o wahanii nieskończonym na  $[0, 1]$ . Wskazówka: zmodyfikować funkcję z poprzedniego zadania, przyjmując  $\alpha = 2$  oraz zastępując  $\sin(1/x)$  przez  $\sin(1/x^2)$ .

**Zadanie 7.5.** Pokazać, że jeśli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma pochodną ograniczoną na  $[a, b]$ , to  $\bigvee_a^b f < \infty$ .

**Zadanie 7.6.** Podać przykłady takich funkcji  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o wahanii skończonym, że funkcja złożona  $g \circ f$  ma wahanie nieskończone. Rozważyć  $g(x) := \sqrt{x}$  oraz  $f$  jak w Zadaniu 7.3 dla  $\alpha := 2$ , zastępując  $\sin(1/x)$  przez  $\sin^2(1/x)$ .

**Zadanie 7.7.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  oraz  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , przy czym  $\bigvee_a^b f < \infty$  oraz  $g$  spełnia warunek Lipschitza. Wykazać, że funkcja  $g \circ f$  ma wahanie skończone.

**Zadanie 7.8.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $\bigvee_a^b f < \infty$ . Wykazać, że  $\bigvee_a^b |f|^p < \infty$  dla  $p \geq 1$ .

**Zadanie 7.9.** Udowodnić, że jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą oraz  $\bigvee_a^b |f| < \infty$ , to  $\bigvee_a^b f < \infty$ . Pokazać, że założenie ciągłości  $f$  jest istotne.

## 7.2 Całka Riemanna-Stieltjesa

**Zadanie 7.10.** Wyznaczyć funkcję  $\bigvee_a^x f$ , gdy: (a)  $f(x) := \cos x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , (b)  $f(x) := x^3 - |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**Zadanie 7.11.** Załóżmy, że  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bigvee_a^b f < \infty$ . Niech  $g(a) := 0$  oraz  $g(x) := \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$  dla  $x \in (a, b]$ . Wykazać, że  $\bigvee_a^b g < \infty$ . Wskazówka: skorzystać z twierdzenia Jordana.

**Zadanie 7.12.** Wykazać, że jeśli istnieje RS-całka  $\int_a^b f dg$ , to jest tylko jedna.

**Zadanie 7.13.** Niech  $f, g, f_i, g_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  dla  $i = 1, 2$ . Wykazać następujące własności:

(i) Jeśli całki  $\int_a^b f_i dg$  istnieją dla  $i = 1, 2$ , to istnieje całka  $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg$  oraz

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg.$$

(ii) Jeśli całki  $\int_a^b f dg_i$  istnieją dla  $i = 1, 2$ , to istnieje całka  $\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2)$  oraz

$$\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

**Zadanie 7.14.** Niech  $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będą dane wzorami  $f := \chi_{(0,1]}$ ,  $g := \chi_{[0,1]}$ . Pokazać, że  $\int_{-1}^0 f dg = 0 = \int_0^1 f dg$ , jednakże całka  $\int_{-1}^1 f dg$  nie istnieje.

**Zadanie 7.15.** Niech  $\alpha, \beta, \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będą dane wzorami

$$\alpha := \chi_{\{0\}}, \quad \beta := \chi_{\{1\}}, \quad \gamma := \chi_{\{1/2\}}.$$

Obliczyć całki

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin x d\alpha, \quad \int_0^1 \alpha d \sin x, \\ & \int_0^1 e^x d\beta, \quad \int_0^1 \beta d e^x, \\ & \int_0^1 x^2 d\gamma, \quad \int_0^1 \gamma d x^2 \\ & \int_0^2 e^x d[x], \quad \int_0^2 [x] d e^x. \end{aligned}$$

**Zadanie 7.16.** Obliczyć całkę  $\int_{-1}^3 x d\alpha$ , gdzie

$$\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -1 \\ 1 & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ -1 & \text{dla } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

**Zadanie 7.17.** Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , przy czym  $f$  jest ciągła, zaś  $g$  ma wahanie skończone. Wykazać, że

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dv_g,$$

gdzie  $v_g(x) := \bigvee_a^x g$  dla  $x \in [a, b]$ .

### 7.3 Pokrycie Vitalego. Różniczkowalność

**Zadanie 7.18.** Pokazać, że dla zbioru  $E \subset (a, b)$  następujące warunki są równoważne:

- (1) dla każdego pokrycia  $\mathcal{F}$  w sensie Vitalego (złożonego z przedziałów domkniętych niezdegenerowanych) zbioru  $E$  istnieje przeliczalna rozłączna podrodzina  $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$  taka, że  $\lambda^*(E \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_*} I) = 0$ ;
- (2) dla każdego pokrycia  $\mathcal{F}$  w sensie Vitalego (złożonego z przedziałów domkniętych niezdegenerowanych) zbioru  $E$  i dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieją parami rozłączne przedziały  $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{F}$  takie, że  $\lambda^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i) < \varepsilon$ ;
- (3) dla każdego pokrycia  $\mathcal{F}$  w sensie Vitalego (złożonego z przedziałów domkniętych niezdegenerowanych) zbioru  $E$  i dla dowolnych  $E' \subset E$ ,  $\varepsilon > 0$  istnieją parami rozłączne przedziały  $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{F}$  takie, że  $\lambda^*(E' \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i) < \varepsilon$ .

**Zadanie 7.19.** Wykazać, że dla funkcji  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sqrt{x} \sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

każdy element  $\alpha \in [-\infty, \infty]$  jest liczbą pochodną w punkcie 0.

**Zadanie 7.20.** Wykazać, że dla każdego zbioru  $E \subset [a, b]$  miary Lebesgue'a zero istnieje funkcja rosnąca i ciągła  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że  $f'(x) = \infty$  dla każdego  $x \in E$ .

**Zadanie 7.21.** Korzystając z twierdzenia Vitalego o pokryciu, udowodnić następujący lemat (por. Lemat 4.2). *Niech funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ściśle rosnąca i niech  $q \geq 0$  oraz  $E \subset [a, b]$ . Jeśli w każdym punkcie  $x \in E$  istnieje liczba pochodna  $Df(x) > q$ , to  $\lambda^*(f[E]) \geq q\lambda^*(E)$ .*

## 7.4 Funkcje pierwszej klasy Baire'a

**Zadanie 7.22.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ . Wykazać, że w obu przypadkach

- $f$  jest ciągła,  $g$  jest 1 klasy Baire'a;
- $g$  jest ciągła,  $f$  jest 1 klasy Baire'a,

funkcja złożona  $f \circ g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  jest 1 klasy Baire'a.

**Zadanie 7.23.** Wykazać wniosek wynikający z charakteryzacji Lebesgue'a:

*Funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest 1 klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego  $U \subset \mathbb{R}$  przeciwobraz  $f^{-1}[U]$  jest zbiorem typu  $F_\sigma$ .*

**Zadanie 7.24.** Dla  $m \in \mathbb{N}$  niech funkcje  $f_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , będą dane wzorem

$$f_m(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2n} \quad \text{dla } x \in [0, 1] \quad \text{oraz } m \in \mathbb{N}.$$

Są to funkcje 1 klasy Baire'a, które przyjmują tylko wartości 0 lub 1. Ustalić, dla jakich  $x$  są przyjmowane wartości 1 funkcji  $f_m$ . Pokazać, że

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

jest funkcją Dirichleta na  $[0, 1]$ . Korzystając z charakteryzacji Lebesgue'a, wykazać, że  $f$  nie jest funkcją 1 klasy Baire'a (zastosować fakt, że zbiór liczb niewymiernych przedziału  $[0, 1]$  nie jest typu  $F_\sigma$ ).

# Bibliografia

- [1] L. Bukovský, *The structure of the real line*, Monografie Matematyczne, vol. 71, Springer Basel AG, 2011.
- [2] R.A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [3] W.J. Kaczor, M.T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej 3*, PWN, Warszawa 2012.
- [4] M. Laczko, V.T. Sós, *Real analysis. Foundations and functions of one variable*, Springer, New York, 2015.
- [5] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1976.
- [6] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, tom I, PWN, Warszawa 1958.
- [7] B.S. Thomson, J.B. Bruckner, A.M. Bruckner, *Real analysis*, wyd. 2, [www.ClassicalRealAnalysis.com](http://www.ClassicalRealAnalysis.com).

**ISBN 978-83-66287-18-1**