

Autoreferat

Wpływ geometrycznej struktury grafu
na oszacowania w wybranych
modelach przeszukiwania grafów

Przemysław Gordinowicz

Łódź, 2018

Imię i nazwisko: Przemysław Gordinowicz

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

doktor nauk matematycznych, 2010, Politechnika Łódzka,
tytuł rozprawy: „Wybrane aspekty grafów n -e.c.”,
promotor: dr hab. Grzegorz Andrzejczak

magister matematyki, 2002, Uniwersytet Łódzki,
tytuł pracy: „Transformaty miary probabilistycznej i zagadnienie odwrotne
do splatania rozkładów”, promotor: prof. dr hab. Adam Paszkiewicz

magister inżynier informatyki, 2001, Politechnika Łódzka,
tytuł pracy: „Wybrane algorytmy optymalizacji dyskretnej”,
promotor: dr hab. Grzegorz Andrzejczak

Informacje o zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

2010– . . .: Politechnika Łódzka, Wydział Fizyki Technicznej Informatyki
i Matematyki Stosowanej, Instytut Matematyki, adiunkt

2001–2010: Politechnika Łódzka, Wydział Fizyki Technicznej Informatyki
i Matematyki Stosowanej, Instytut Matematyki, asystent

Spis treści

Spis treści	i
1 Osiągnięcie naukowe	1
2 Cel naukowy i wyniki	3
2.1 Wprowadzenie	3
2.2 Gry pościgowe	4
2.2.1 Grafy liniowe [H1]	6
2.2.2 Grafy przecięć obiektów geometrycznych [H3]	9
2.3 Gry lokalizacyjne	13
2.3.1 Metody dowodowe	15
2.4 Problem strażaka na grafach planarnych	16
2.4.1 Metody dowodowe	19
3 Opis pozostałych osiągnięć naukowo badawczych	22
3.1 Grafy o dobrze rozszerzających się sąsiedztwach i granice Fra- iśssého struktur relacyjnych	23
3.2 Gry pościgowe cz. 2	25
3.3 Szczotkowanie grafu	26
3.4 Pozostałe prace	26
Bibliografia	28

Rozdział 1

Osiągnięcie naukowe

Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016r. poz. 1311.)

Tytuł osiągnięcia naukowego

**Wpływ geometrycznej struktury grafu na oszacowania
w wybranych modelach przeszukiwania grafów**

Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

- [H1] A. Dudek, P. Gordinowicz, P. Pralat, Cops and Robbers playing on edges, *Journal of Combinatorics*, **5** (2014), 131–153.
- [H2] P. Gordinowicz, Planar graph is on fire, *Theoretical Computer Science*, **593** (2015) 160–164.
- [H3] T. Gavenčiak, P. Gordinowicz, V. Jelínek, P. Klavík, J. Kratochvíl, Cops and Robbers on intersection graphs, *European Journal of Combinatorics*, **72** (2018), 45–69.

Wersja konferencyjna:

T. Gavenčiak, P. Gordinowicz, V. Jelínek, P. Klavík, J. Kratochvíl, Cops and Robbers on String Graphs, *The 26th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2015), Lecture Notes in Computer Science*, **9472** (2015) 355–366.

-
- [H4] P. Gordinowicz, The 2-surviving rate of planar graphs with average degree lower than $9/2$, *Journal of Graph Theory*, **89** (2018) 341–349.
- [H5] B. Bosek, P. Gordinowicz, J. Grytczuk, N. Nisse, J. Sokół, M. Śleszyńska-Nowak, Localization game on geometric and planar graphs, *Discrete Applied Mathematics*, przyjęte do druku, <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.04.017>.

Rozdział 2

Cel naukowy i wyniki

2.1 Wprowadzenie

Rozważmy następujący problem: w skomplikowanym systemie jaskiń zaginął speleolog i nie ma z nim kontaktu. Na poszukiwanie wysłana zostaje ekipa ratunkowa. Jak liczna powinna być oraz w jaki sposób prowadzić poszukiwanie, żeby zapewnić jego sukces? Zauważmy, że poszukiwany speleolog również może się przemieszczać, do tego z inną prędkością niż ratownicy, co więcej — w najgorszym przypadku może zachowywać się w sposób minimalizujący możliwość jego odnalezienia. Wyobrażając sobie system jaskiń jako graf (korytarze to krawędzie, a ich końce lub rozgałęzienia/skrzyżowania to wierzchołki) możemy sformułować pierwszy z modeli przeszukiwania grafów — *przeszukiwanie krawędziowe* (ang. edge-searching) sformułowane przez Parsonsa [27] w 1978r., a zainspirowane artykułem Breischa [3] z czasopisma speleologicznego (por. artykuł przeglądowy [14]).

Dziedzina przeszukiwania grafów rozrosła się, głównie z powodu zastosowań i obejmuje wiele modeli, które opisują jak za pomocą pewnej liczby urządzeń (agentów/robotów) zlokalizować, wyeliminować lub ograniczyć pewne zagrożenie poruszające się po grafie. Analizę najgorszego przypadku wygodnie tłumaczy się przez gry kombinatoryczne (deterministyczne gry o pełnej informacji między dwoma graczami, w których jeden z graczy ma strategię wygrywającą), z których najpopularniejszą jest wprowadzona przez Quillota [30] oraz, niezależnie, przez Nowakowskiego i Winklera [26] gra w policjantów i złodzieja (więcej w podrozdziałach 2.2, 3.2). Barwny, przemawiający do wyobraźni, język powoduje, że wiele pojęć z dziedziny teorii grafów jest tłumaczonych na język przeszukiwania grafów, dla przykładu pojęcia szerokości ścieżkowej oraz szerokości drzewowej (ang. path-

width, treewidth), które pojawiły się w dowodzie twierdzenia Robertsona–Seymoura (o minorach grafowych) zostały opisane (por. [36, 37, 38]) przez minimalną liczbę policjantów w helikopterach (posunięcia gracza nie są ograniczone strukturą grafu, za to wykonujący ruch policjant jest wyłączony z gry w trakcie posunięcia złodzieja) potrzebnych do złapania złodzieja poruszającego się z dowolną szybkością po wierzchołkach grafu, wzdłuż ścieżek niezablokowanych obecnością policjanta w którymś wierzchołku (w wypadku szerokości ścieżkowej — niewidzialnego).

Sytuację braku pełnej informacji dla jednego z graczy — tak jest np. w pierwszym przedstawionym, „speleotopologicznym” modelu — wygodnie jest analizować rozważając jednoosobowy wariant gry (szukając optymalnej strategii przeciwko pewnemu deterministycznemu procesowi). Fragment grafu, o którym wiadomo w wyniku poszukiwań, że na pewno nie zawiera poszukiwanego speleologa określamy jako czysty, a celem jest strategia przejścia ratownikami po grafie w taki sposób, aby wyczyścić cały graf. Tego rodzaju podejście stosowane jest w wariacie gry w policjantów i złodzieja, gdy złodziej jest niewidoczny (dopóki policjant nie znajdzie się w tym samym wierzchołku grafu) [8]. Podobnie w modelu szczotkowania grafu, będącego wariantem krawędziowego przeszukiwania grafów (por. podrozdział 3.3). Taka technika pojawia się również przy dowodzeniu oszacowań dla gier lokalizacyjnych (podrozdział 2.3). Wreszcie jako jednoosobową grę rozważa się problem strażaka na grafie (podrozdział 2.4) nie rozpatrując odpowiadającego mu wariantu rozgrywki między dwoma graczami, w której pierwszy gracz jest pozbawiony pełnej informacji.

W niniejszym autoreferacie używamy standardowej terminologii grafowej, zgodnej z książką [9] i słownikiem [39]. W szczególności rozważane grafy są proste, nieskierowane i (o ile nie stwierdzono inaczej) skończone. Warto zauważyć, że w większości modeli przeszukiwań ważną rolę odgrywa spójność grafu: w wypadku grafu niespójnego łączna liczba policjantów koniecznych do złapania złodzieja jest sumą po wszystkich spójnych składowych, a w wypadku wariantu helikopterowego — maksimum. Mając na uwadze powyższe, będziemy zakładać (o ile nie stwierdzono inaczej), że przeszukiwane grafy są spójne.

2.2 Gry pościgowe

Niech G będzie grafem prostym, a $k \in \mathbb{N}^+$. Rozważmy następującą grę między dwoma graczami, z których pierwszy porusza k policjantami, a drugi złodziejem. Najpierw pierwszy gracz ustawia swoje pionki w wybranych

wierzchołkach grafu, następnie robi to drugi gracz. Dalej gracze poruszają się w rundach (najpierw policjanci, potem złodziej): w każdej rundzie każdy pionek może pozostać w zajmowanym wierzchołku lub przenieść się do wierzchołka sąsiedniego. Gracze znają nawzajem swoje pozycje. Gra kończy się wygraną policjantów gdy któryś z nich złapie złodzieja, to znaczy znajdzie się w tym samym wierzchołku co złodziej. Przyjmujemy, że złodziej wygrywa, gdy gra może trwać dowolnie długo, to znaczy, że jest w stanie uniknąć złapania w każdej skończonej liczbie rund. Gra, jak już nadmieniono, w wersji z $k = 1$, została wprowadzona przez Quillota [30] oraz Nowakowskiego i Winklera [26]. W obu pracach scharakteryzowano grafy policyjne, czyli takie, że pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

Począwszy od pracy Aignera i Fromme'a [1] rozważa się wariant z wieloma policjantami definiując *liczbę policyjną* grafu $c(G)$ jako najmniejsze $k \geq 1$ takie, że k policjantów ma strategię wygrywającą. Liczba ta jest dobrze zdefiniowana, oczywiste są oszacowania $c(G) \leq \gamma(G) \leq |V(G)|$, gdzie $\gamma(G)$ oznacza liczbę dominującą grafu G . Ponadto, dla rodziny grafów \mathcal{G} możemy zdefiniować liczbę $\bar{c}(\mathcal{G})$ równą $\max\{c(G) : G \in \mathcal{G}\}$ o ile to maksimum istnieje, w przeciwnym razie powiedzieć, że klasa \mathcal{G} ma nieograniczoną liczbę policyjną. Najistotniejszym wynikiem pracy [1] jest wykazanie, że $\bar{c}(\text{PLANAR}) = 3$, gdzie PLANAR to rodzina spójnych grafów planarnych.

Kluczowym narzędziem dowodu jest następujący

Lemat 2.2.1 ([1], Lemma 4). *Niech G będzie grafem, $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ a P pewną najkrótszą uv -ścieżką w G . Przyjmując, że w grze jest co najmniej 2 policjantów, pierwszy gracz ma strategię, aby po skończonej liczbie posunięć jednym policjantem zablokować złodziejowi możliwość wejścia na ścieżkę P . To znaczy, jeśli złodziej wejdzie na wierzchołek ścieżki P zostanie natychmiast złapany.*

Przykładem grafu planarnego, który wymaga 3 policjantów jest graf dwunastościanu. Idea dowodu, że liczba policyjna spójnego grafu planarnego jest ograniczona przez 3 jest następująca: używając powyższego lematu i korzystając z ustalonej płaskiej reprezentacji grafu planarnego G policjanci stopniowo ograniczają terytorium złodzieja \mathcal{R} (podgraf grafu G , po którym złodziej może poruszać się bezpiecznie interpretowany jednocześnie, dzięki płaskiej reprezentacji G , jako fragment płaszczyzny ograniczony krawędziami grafu). Analiza dowodu i wykorzystania lematu 2.2.1 wskazuje, że pojęcie „najkrótsza uv -ścieżka” oznacza ścieżkę bez dostępnego skrótu dla złodzieja (tzn. że żadna krótsza uv -ścieżka nie przechodzi przez \mathcal{R}). W trakcie gry jeden, lub dwóch policjantów wystarcza do zamknięcia złodzieja w \mathcal{R} gdyż

separatorem między \mathcal{R} a $G \setminus \mathcal{R}$ jest albo wierzchołek rozcinający $c \in V(G)$, albo pewien geodezyjny cykl C (cykl złożony z dwóch ścieżek bez skrótów w \mathcal{R}). Wówczas wolny policjant kontynuuje strategię ograniczania obszaru \mathcal{R} zajmując kolejny wierzchołek rozcinający lub kolejną najkrótszą ścieżkę przyległą do C (tworząc nowy cykl geodezyjny).

Najistotniejszym problemem związanym z grami pościgowymi jest roztrzygnięcie hipotezy Meyniela [15]

Hipoteza 2.2.2. *Dla każdego grafu G o n wierzchołkach zachodzi $c(G) = O(\sqrt{n})$.*

Wiadomym jest istnienie rodzin grafów (ekstremalnych w sensie hipotezy Meyniela), które spełniają $c(G) = \Theta(\sqrt{n})$ — przykładem takiej rodziny są grafy incydencji płaszczyzn rzutowych.

Drugim istotnym problemem jest uogólnienie oszacowania Aignera i Fromme'a dla grafów planarnych na inne rodziny grafów o wybranej strukturze geometrycznej. Dla przykładu: Quillot [31] wykazał oszacowanie $c(G) \leq 2g + 3$ na liczbę policyjną grafów zanurzalnych na powierzchniach o genusie g . Oszacowanie to zostało poprawione przez Schroedera [33] do postaci $c(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}g \rfloor + 3$. Co więcej, Schroeder postawił (i wykazał dla przypadku $g \leq 2$) hipotezę

Hipoteza 2.2.3. *Dla każdego grafu zanurzonego na powierzchni o genusie g zachodzi $c(G) \leq g + 3$.*

W ten nurt wpisują się wyniki badań zawarte w pracach [H1, H3].

2.2.1 Grafy liniowe [H1]

Niech $G = (V(G), E(G))$ będzie grafem. Grafem liniowym grafu G nazywamy graf $L(G) = (E(G), \{\{e_1, e_2\} : e_1, e_2 \in E(G) \wedge |e_1 \cap e_2| = 1\})$. Innymi słowy $L(G)$ jest to graf, którego wierzchołkami są krawędzie grafu G , które sąsiadują w $L(G)$ gdy są incydentne (dzielą jeden wspólny wierzchołek) w G . Łatwo widać, że gra w policjantów i złodzieja na grafie $L(G)$ ma swój odpowiednik w grze na grafie G ze zmienionymi zasadami — policjanci i złodziej poruszają się po krawędziach grafu przechodząc przez wspólny wierzchołek dwóch krawędzi.

Praca [H1] zawiera szereg oszacowań wiążących liczbę policyjną grafu liniowego. W szczególności zawiera charakteryzację grafów dla których $c(L(G)) = 1$, oszacowanie na $c(L(G))$ w zależności od $c(G)$, wyznaczenie $c(L(G(P)))$ dla grafu $G(P)$ incydencji płaszczyzny rzutowej P i wreszcie oszacowanie na liczbę policyjną grafów liniowych grafów planarnych:

Twierdzenie 2.2.4 ([H1], Theorem 3.2). *Graf G spełnia $c(L(G)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (i) G jest spójny
- (ii) G jest cięciwowy
- (iii) G nie zawiera podgrafu K_4

Zauważmy, że ta charakterystyka jest nieco prostsza od charakterystyki grafów policyjnych oraz że każdy graf G spełniający $c(L(G)) = 1$ spełnia $c(G) = 1$.

Twierdzenie 2.2.5 ([H1], Theorem 2.1). *Niech G będzie dowolnym grafem. Wówczas*

$$\left\lceil \frac{c(G)}{2} \right\rceil \leq c(L(G)) \leq c(G) + 1.$$

Twierdzenie 2.2.6 ([H1], Theorem 4.2). *Niech q będzie potęgą liczby pierwszej, a $P = PG(2, q)$ będzie płaszczyzną rzutową nad q -elementowym ciałem. Wówczas $c(L(G(P))) = q + 1$, gdzie $G(P)$ jest grafem incydencji płaszczyzny rzutowej P .*

Ponieważ zachodzi $|V(L(G(PG(2, q))))| = (q + 1)(q^2 + q + 1)$ grafy liniowe grafów incydencji przestrzeni rzutowych nie są ekstremalne w sensie hipotezy Meyniela.

Twierdzenie 2.2.7 ([H1], Theorem 6.1). *Niech \mathcal{G} będzie rodziną grafów liniowych spójnych grafów planarnych; zachodzi $\bar{c}(\mathcal{G}) = 3$.*

Praca [H1] zawiera ponadto istotne wyniki dotyczące grafów losowych, które nie zostaną poruszone w autoreferacie, gdyż w są w całości dziełem współautorów pracy.

Metody dowodowe

Dowód Twierdzenia 2.2.4 nawiązuje do charakteryzacji grafów policyjnych z prac [26, 30]: wierzchołek $v \in V(G)$ grafu G nazywamy *narożnikiem* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $u \in V(G) \setminus \{v\}$ taki, że $N[v] \subseteq N[u]$; graf G jest policyjny wtedy i tylko wtedy, gdy jest *konstruowalny*, to znaczy jest jednowierzchołkowy lub może powstać poprzez dodanie narożnika (nowego wierzchołka, odpowiednio połączanego) do konstruowalnego grafu. Analogicznie: graf G' jest L -konstruowalny, gdy jest jednowierzchołkowy, lub powstaje z grafu L -konstruowalnego G przez dodanie nowego wierzchołka połączanego z jednym wierzchołkiem G lub z oboma końcami jednej

krawędzi G . W pracy [H1] wykazano, że graf $L(G)$ jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest L -konstruowalny oraz, że graf G spełnia warunki Twierdzenia 2.2.4 wtedy i tylko wtedy gdy jest L -konstruowalny.

Dowód Twierdzenia 2.2.5 opiera się na tworzeniu komplementarnych strategii dla policjantów i złodzieja (z gdy na grafie G na grę na grafie $L(G)$ i odwrotnie).

Dowód Twierdzenia 2.2.6 opiera się na modyfikacji lematu z pracy Aignera i Fromme'a [1], gdyż w wypadku gry na krawędziach (na grafie liniowym), oszacowanie na talię grafu należy zmienić na 6.

Lemat 2.2.8 ([1], Theorem 3). *Niech G będzie grafem spójnym o tali co najmniej 5. Wówczas $c(G) \geq \delta(G)$.*

Lemat 2.2.9 ([H1], Lemma 4.1). *Niech G będzie grafem spójnym o tali co najmniej 6. Wówczas $c(L(G)) \geq \delta(G)$.*

Wykorzystując ten lemat uzyskuje się oszacowanie $c(L(G(PG(2, q)))) \geq q + 1$, ponieważ graf incydencji płaszczyzny rzutowej $PG(2, q)$ jest dwudzielny, $q + 1$ -regularny, nie ma cykli długości 4, gdyż każda para punktów ma tylko jedną wspólną linię, a każda para linii — tylko jeden wspólny punkt. Dowód Twierdzenia 2.2.6 w pracy [H1] kończy wskazanie jawnej strategii dla $q + 1$ policjantów.

Dowód Twierdzenia 2.2.7 w części pokazującej ograniczenie górne jest niemal identyczny do dowodu Aignera i Fromme'a: podobnie jeden lub dwóch policjantów ogranicza terytorium złodzieja (tak samo interpretowane) przez zamknięcie mostu (krawędzi rozcinającej) lub pewnego cyklu geodezyjnego (bez skrótów idących przez terytorium złodzieja), podczas gdy wolny policjant przemieszcza się aby stworzyć nowe ograniczenie. Nieco inaczej wygląda i odrębnego dowodu wymagał odpowiednik lematu 2.2.1.

Lemat 2.2.10 ([H1], Lemma 6.2). *Niech G będzie grafem, $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ a P pewną najkrótszą uv -ścieżką w G . Przyjmując, że w grze jest co najmniej 2 policjantów, pierwszy gracz ma strategię, aby po skończonej liczbie posunięć jednym policjantem zablokować złodziejowi możliwość przejścia przez ścieżkę P . To znaczy, jeśli złodziej w dwóch rundach z rzędu będzie przebywał na krawędziach incydentnych z pewnym wierzchołkiem $v \in V(P)$ (a tylko tak może przekroczyć ścieżkę P) to zostanie natychmiast złapany.*

Przykładem grafu planarnego, którego graf liniowy wymaga 3 policjantów jest graf piłki futbolowej (graf liniowy grafu dwunastościanu wymaga tylko 2).

2.2.2 Grafy przecięć obiektów geometrycznych [H3]

Niech \mathfrak{K} będzie klasą obiektów geometrycznych (np. krzywych na płaszczyźnie). Przez graf przecięć obiektów z \mathfrak{K} rozumiemy graf G (dokładniej klasę abstrakcji z uwagi na relację izomorficzności grafów), którego zbiór wierzchołków zawiera się w \mathfrak{K} podczas gdy dwa wierzchołki sąsiadują, gdy odpowiadające im obiekty przecinają się.

Wśród rozważanych klas grafów przecięć szczególnie istotna jest klasa STRING grafów przecięć ograniczonych krzywych na płaszczyźnie (ciągłych obrazów przekształcenia przedziału $[0, 1]$ w \mathbb{R}^2). Przyjmując w miejsce płaszczyzny (sfery) orientowalne (lub nieorientowalne) powierzchnie topologiczne o ustalonym genusie można rozważać klasy grafów g -GENUS STRING (lub g' -EULER-GENUS STRING). Z kolei wprowadzając dodatkowe restrykcje na postać rozważanych krzywych można uzyskać pewne podklasy klasy STRING: klasa INTERVAL-FILAMENT oznacza klasę grafów przecięć wykresów funkcji ciągłych postaci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $f(a) = f(b) = 0$ oraz $f(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$; klasa OUTER-STRING — klasę grafów przecięć ograniczonych krzywych na półpłaszczyźnie, z co najmniej jednym końcem leżącym na jej brzegu (ciągłych obrazów funkcji $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}$ takich, że $f(0) = (0, \cdot)$).

Warto odnotować, że każdy graf jest grafem przecięć krzywych w \mathbb{R}^3 , stąd przy rozważaniu grafów przecięć obiektów w 3 lub więcej wymiarach wprowadza się silniejsze restrykcje rozważając na przykład klasy d -BOX grafów przecięć d -wymiarowych przedziałów w \mathbb{R}^d , lub d -BALL — kul w \mathbb{R}^d .

Główne wyniki przedstawione w pracy [H3] można zaprezentować w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 2.2.11 ([H3], Theorem 1.1).

- (i) $\bar{c}(\text{INTERVAL-FILAMENT}) = 2$
- (ii) $3 \leq \bar{c}(\text{OUTER-STRING}) \leq 4$
- (iii) $3 \leq \bar{c}(\text{STRING}) \leq 15$
- (iv) $g^{\frac{1}{2}-o(1)} \leq \bar{c}(g\text{-GENUS STRING}) \leq 10g + 15$
- (v) $g'^{\frac{1}{2}-o(1)} \leq \bar{c}(g'\text{-EULER-GENUS STRING}) \leq 10g' + 15$

Istotnym wnioskiem z powyższego twierdzenia, w świetle lematu 2.2.8 i obserwacji, że klasy grafów przecięć są zamknięte na branie indukowanych podgrafów (Wniosek 2.2.12) jest ograniczenie podane we Wniosku 2.2.13.

Wniosek 2.2.12 ([H3], Corollary 1.4). *Niech \mathcal{G} będzie klasą grafów zamkniętą na branie indukowanych podgrafów taką, że $\bar{c}(\mathcal{G}) = k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas każdy graf $G \in \mathcal{G}$ o talii co najmniej 5 posiada wierzchołek stopnia niewiększego niż k . Zatem G jest k -zdegenerowany (każdy jego podgraf posiada wierzchołek stopnia niewiększego niż k) więc ma liczbę chromatyczną co najwyżej $k + 1$.*

Wniosek 2.2.13 ([H3], Corollary 1.5,1.6). *Dowolny graf klasy STRING o talii co najmniej 5 jest 16-kolorowalny. Dowolny graf klasy OUTER-STRING o talii co najmniej 5 jest 5-kolorowalny.*

Można zauważyć, że klasa grafów liniowych, opisana w poprzednim podrozdziale, również jest klasą grafów przecięć — rozważając rysunki grafu na płaszczyźnie wyobraża się wierzchołki jako punkty leżące na pewnej prostej ℓ , a krawędzie jako łuki łączące te punkty, nie przecinające (poza końcami) prostej ℓ . Korzystając z takiego rysunku jako reprezentacji ustalonego grafu G można reprezentować jego krawędzie jako pary punktów (wierzchołków/końców) — graf liniowy $L(G)$ jest wówczas grafem przecięć tych par. Zgodnie z Twierdzeniem 2.2.6 klasa LINE grafów liniowych ma nieograniczoną liczbę policyjną — zatem również klasa 2-INTERVAL grafów przecięć sum dwóch domkniętych przedziałów ma ją nieograniczoną. Wiadomo z kolei (z charakteryzacji Nowakowskiego i Winklera [26]), że $\bar{c}(1\text{-INTERVAL}) = 1$. Nieograniczona liczba policyjna charakteryzuje większą liczbę klas grafów (nie tylko grafy przecięć zbiorów niespójnych ale też pewnych podzbiorów \mathbb{R}^3).

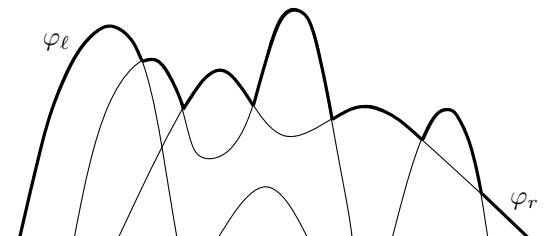
Twierdzenie 2.2.14 ([H3], Theorem 1.7). *Klasy grafów przecięć LINE, 2-INTERVAL, 3-BOX, 3-BALL mają nieograniczoną liczbę policyjną.*

Twierdzenie ([H3], Theorem 1.7) opisuje nieco większy katalog klas grafów przecięć (dowody są te same lub analogiczne).

Metody dowodowe

Dowód Twierdzenia 2.2.11 (w każdym przypadku) opiera się na stopniowym ograniczaniu terytorium \mathcal{R} (rozumianego jako podgraf, lecz mającego także interpretację geometryczną) bezpiecznego dla złodzieja, czyli takiego, że każda próba opuszczenia \mathcal{R} będzie oznaczać, że zostanie on złapany w jednym ruchu. Jest to zatem ta sama koncepcja, jak w dowodzie Aignera i Fromme'a.

W wypadku klasy INTERVAL-FILAMENT zauważmy, że cykl na 4 wierzchołkach spełnia $C_4 \in \text{INTERVAL-FILAMENT}$, zatem co najmniej 2 policjantów jest potrzebnych. Z drugiej strony 2 policjantów może stosować następującą strategię. Rozważając grę na grafie G ustalmy jego reprezentację geometryczną (por. Rysunek 2.1). Wyobraźmy sobie, że w pewnej fazie

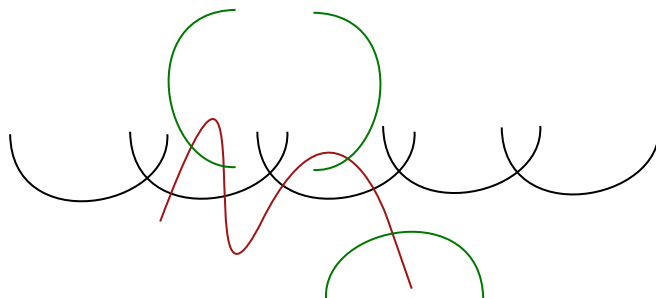


Rysunek 2.1: Reprezentacja grafu klasy INTERVAL-FILAMENT. Brzeg został pogrubiony. Wykresy reprezentujące pierwszy i ostatni wierzchołek na ścieżce brzegowej są oznaczone jako φ_ℓ i φ_r .

strategii, terytorium złodzieja \mathcal{R} wygląda jak na tym rysunku. Oznaczmy zbiór $M \subseteq V(\mathcal{R})$ taki, że odpowiadające wierzchołkom z M wykresy tworzą brzeg terytorium \mathcal{R} . Jeden z policjantów (strażnik) będzie ograniczał terytorium złodzieja (w pierwszej fazie nie bierze udziału w rozgrywce), a drugi (łowca) — przechodził po dowolnej ścieżce złożonej z wierzchołków M od skrajnie lewego do skrajnie prawego wykresu (φ_ℓ i φ_r na rysunku). Zauważmy, że przed ruchem policjanta (znajdującego się w wierzchołku/wykresie φ_i) złodziej może znajdować się na wykresie przecinającym φ_i , będącym na prawo od φ_i albo w całości pod φ_i . Jeśli jest na wykresie przecinającym — zostanie złapany natychmiast. Jeśli pod — policjant zostając w wierzchołku φ_i ogranicza terytorium złodzieja do składowej $\mathcal{R}' \subsetneq \mathcal{R}$ znajdującej się w całości pod φ_i (stanie się strażnikiem w kolejnej fazie strategii) — zauważmy, że aby opuścić \mathcal{R}' złodziej musiałby wejść na wykres przecinający φ_i — wówczas zostanie złapany w kolejnym ruchu. Jeśli złodziej jest na prawo od φ_i łowca może przejść do kolejnego wierzchołka ścieżki φ_{i+1} , zaś złodziej po swoim ruchu znajdzie się na wykresie przecinającym φ_{i+1} , pod φ_{i+1} lub na prawo od φ_{i+1} . Istotne jest, że złodziej nie może przejść wykres znajdujący się w całości na lewo od pozycji łowcy. Policjanci (wymieniając się rolami) mogą stopniowo ograniczać terytorium złodzieja, aż zostanie on złapany.

Aby pokazać ograniczenie dla klasy OUTER-STRING można zastosować zbliżoną strategię — różnica jest taka, że dwóch strażników i dwóch łowców będzie zajmować przecinające się parami krzywe (pary przecinających się krzywych będą pełniły rolę odpowiadającą wykresom funkcji w powyższej strategii).

Dowód Twierdzenia 2.2.11(iii) to z kolei pełna analogia strategii z dowodu Aignera i Fromme'a. Występują w nim jednak znaczące różnice. Przede wszystkim w wypadku grafów przecięć krzywych złodziej może przeskoczyć najkrótszą ścieżkę przez wierzchołek który sąsiaduje z pewnym wierzchołkiem tej ścieżki (w geometrycznej reprezentacji ścieżka to ciąg kolejno przecinających się krzywych, wystarczy że pewna inna krzywa przecina którąś z krzywych tworzących ścieżkę — por. Rysunek 2.2).



Rysunek 2.2: Reprezentacja grafu klasy **STRING**. Najkrótsza ścieżka złożona z krzywych w kolorze czarnym może zostać przekroczona przez krzywą w kolorze czerwonym.

Odpowiednik Lematu 2.2.1 powinien więc umożliwić policjantom blokowanie ścieżki wraz z jej sąsiedztwem. Lemat podany przez Chiniforooshana [7] mówi, że aby blokować najkrótszą ścieżkę wraz jej sąsiedztwem potrzeba 5 policjantów, co ostatecznie doprowadzi do oszacowania 15 na liczbę policyjną grafów przecięć krzywych.

Z powodów technicznych jednak ani lemat Chiniforooshana ani strategia Aignera–Fromme'a nie mogą zostać zastosowane bezpośrednio: geometryczna interpretacja terytorium złodzieja \mathcal{R} , jako obszaru na płaszczyźnie ograniczonego przez pewne krzywe, potrzebna do zastosowania strategii Aignera–Fromme'a powoduje, że wierzchołek odpowiadający jednej krzywej w całym grafie (częściowo leżącej w terytorium złodzieja) może odpowiadać kilku wierzchołkom odpowiadającym segmentom tej krzywej w terytorium złodzieja. Lepiej więc rozważać nie tyle najkrótsze ścieżki, co spacery bez skrótów w terytorium \mathcal{R} w sensie pewnej funkcji odległości określonej przez geometrię krzywych obciętych do terytorium \mathcal{R} .

Oszacowania z Twierdzenia 2.2.11(iv-v) są uzyskana w podobny sposób analogią wyniku Quillota [31] (oszacowanie $c(G) \leq 2g + 3$ dla grafów zanurzalnych na powierzchni o genusie g). Ponownie użycie odpowiednika lematu Chiniforooshana wymusza 5-krotne powiększenie oszacowania. Oszacowanie

to można najprawdopodobniej poprawić stosując metodę Schroedera [33], wymagałoby to jednak pokonania wielu technicznych trudności.

Kluczem dowodu twierdzenia 2.2.14 (w części, w której nie jest wnioskem z Twierdzenia 2.2.6) jest następujący lemat.

Lemat 2.2.15 ([H3], Lemma 6.1). *Niech G będzie dowolnym grafem, $d \in \mathbb{N}^+$ a $G^{(d)}$ oznacza graf powstały przez $d - 1$ -krotną subdywizję każdej krawędzi grafu G (każdą krawędź zastępujemy ścieżką zawierającą $d - 1$ nowych wierzchołków). Wówczas*

$$c(G) \leq c(G^{(d)}) \leq c(G) + 1.$$

Dalsza część dowodu polega na wykazaniu, że dla dowolnego grafu G istnieje takie $d \in \mathbb{N}^+$, że $G^{(d)} \in 3\text{-BALL}$. W wypadku klasy 3-BOX znany jest fakt, że $G^{(3)} \in 3\text{-BOX}$.

2.3 Gry lokalizacyjne

W poniższym podrozdziale opisany jest wariant gry w policjantów i złodzieja motywowany lokalizacją w sieciach bezprzewodowych (np. sieci telefonii komórkowej). Niech G będzie grafem, a $k \in \mathbb{N}^+$. Złodziej porusza się po wierzchołkach grafu G tak samo jak w wariacie klasycznym, opisanym w poprzednim podrozdziale. Nie jest jednak widoczny dla policjantów. W każdej rundzie policjanci mogą skontrolować k dowolnych wierzchołków grafu G (jak w wariacie helikopterowym, nie są ograniczeni strukturą grafu) powiedzmy $B = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V(G)^k$. W wyniku kontroli otrzymują wektor k liczb naturalnych $D(B) = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ takich, że $d_i = d_G(r, v_i)$, gdzie r jest (nieznanym policjantom) wierzchołkiem zajmowanym przez złodzieja. Celem dla policjantów jest zlokalizować (odgadnąć pozycję) złodzieja na podstawie (aktualnej i historycznych) wartości $D(B)$ uzyskanych w trakcie rozgrywki, a celem złodzieja — unikać lokalizacji. Co istotne, policjanci nie muszą odgadywać kolejnego ruchu złodzieja (tzn. nie jest wymagane, aby wierzchołek w którym znajduje się złodziej w ostatniej rundzie rozgrywki należał do zbioru B). Niech $\zeta(G)$ oznacza najmniejszą liczbę k dla której policjanci mają strategię wygrywającą — nazywamy ją *liczbą lokalizacyjną* grafu G . Zakładamy przy tym, że złodziej gra perfekcyjnie, a nawet ma wiedzę o strategii policjantów.

Gra, ograniczona do $k = 1$ została wprowadzona przez S. Seager [34], a następnie badana w pracach (m.in.) [6, 35]. Zostało pokazane, że dla dowolnego drzewa T , $\zeta(T) \leq 2$ [34]. Co więcej, drzewa T dla których $\zeta(T) = 2$

zostały scharakteryzowane w pracy [35]. Bardziej precyzyjne, w pierwszej pracy [34] Seager udowodniła, że jeden policjant wystarcza żeby zlokalizować złodzieja na dowolnym drzewie, pod warunkiem, że złodziej nie może przejść do wierzchołka sprawdzanego przed chwilą przez policjanta. W pracy [35] udowodniła, że to ograniczenie jest konieczne dla drzew które zawierają jako poddrzewo drzewo $T_{3,3}$ (wierzchołek stopnia 3 sąsiaduje z 3 wierzchołkami stopnia 3, a pozostałych 6 wierzchołków ma stopień 1). Wariant z większą liczbą policjantów został wprowadzony w pracy [H5] oraz niezależnie w pracy [18], gdzie udowodniono (m.in.), że $\zeta(G) \leq \lfloor \frac{(\Delta+1)^2}{4} \rfloor + 1$ w dowolnym grafie G o maksymalnym stopniu Δ .

Warto zauważyć, że gra lokalizacyjna jest powiązana z pojęciem *wymiaru metrycznego** grafu G , oznaczanego przez $\dim(G)$, wprowadzonego przez Harary'ego i Meltera [16]. Faktycznie, $\dim(G)$ może zostać zdefiniowany jako najmniejsza liczba $k \in \mathbb{N}^+$ taka, że k policjantów wygrywa grę lokalizacyjną w jednej rundzie. Zatem, parametr $\zeta(G)$ może być rozważany jako rozgrywany wariant $\dim(G)$. Podobny związek jest między (zwykłą) liczbą policyjną a liczbą dominującą grafu.

Najistotniejszym wynikiem pracy [H5] jest wykazanie, że liczba lokalizacyjna grafu planarnego jest nieograniczona (nawet dla grafu o szerokości drzewowej 2):

Twierdzenie 2.3.1 ([H5], Corollary 9). *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}^+$ istnieje graf planarny G o szerokości drzewowej 2 (dokładnie: drzewo powiększone o uniwersalny wierzchołek) taki, że $\zeta(G) > k$.*

Z drugiej strony, nieopublikowana jeszcze praca [C4] pokazuje, że liczba lokalizacyjna grafu zewnętrznie planarnego jest ograniczona z góry przez 3, nawet przy mniejszej liczbie informacji otrzymywanej przez policjantów.

Twierdzenie 2.3.2 ([C4], Theorem 10). *Dowolny graf zewnętrznie planarny G spełnia $\zeta^*(G) \leq 3$. Co więcej istnieje strategia policjantów która zajmuje $O(n^2)$ rund, gdzie $n = |V(G)|$.*

Liczba $\zeta^*(G)$ jest odpowiednikiem liczby lokalizacyjnej w scenariuszu, w którym policjanci poznają wektor odległości tylko wtedy, gdy złodziej jest w jednym z badanych wierzchołków. W przeciwnym razie otrzymują wynik porównania odległości dla każdej pary sprawdzanych wierzchołków (czy są równe, czy wierzchołek r jest bliżej któregoś z nich). Oczywiście więc dla dowolnego grafu $\zeta(G) \leq \zeta^*(G)$.

*Wymiar metryczny grafu G to wielkość najmniejszego podzbioru $S \subseteq V(G)$ takiego, że dowolny wierzchołek $v \in V(G)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez jego odległości do wierzchołków z S .

Do innych znaczniejszych wyników pracy należy oszacowanie liczby lokalizacyjnej przez szerokość ścieżkową grafu oraz dowód NP-trudności wyznaczenia liczby lokalizacyjnej ([H5], Theorem 12).

Twierdzenie 2.3.3 ([H5], Proposition 3). *Dowolny graf G spełnia $\zeta(G) \leq pw(G)$. Co więcej, dla grafów klasy 1-INTERVAL zachodzi równość.*

2.3.1 Metody dowodowe

Dowód Twierdzenia 2.3.1 opiera się na dwóch redukcjach, które upraszczają rozważaną rozgrywkę. Po pierwsze: istnienie w grafie G uniwersalnego wierzchołka (połączonego ze wszystkimi pozostałymi wierzchołkami z G), powiedzmy v , powoduje, że badając dowolny wierzchołek u policjant może uzyskać wyłącznie odległości 0, 1 lub 2 (odpowiednio gdy złodziej jest w wierzchołku u , jego sąsiedztwie, lub w dowolnym innym wierzchołku grafu). Innymi słowy gra lokalizacyjna na grafie G jest niemal równoważna grze na grafie $G \setminus v$ w której policjanci (w helikopterach) widzą na odległość 1. Jest to analogia do rozważanych wcześniej modeli (np. [8]). Formalnie, jeśli $\zeta_b(G)$ jest liczbą lokalizacyjną dla opisanego modelu z widocznością 1 wówczas można pokazać, że:

Obserwacja 2.3.4 ([H5], Proposition 4). *Dla dowolnego grafu G , niech G' będzie kopią grafu G z dodanym dodatkowym wierzchołkiem sąsiadującym ze wszystkimi wierzchołkami G . Wówczas $\zeta_b(G) \leq \zeta(G')$.*

W szczególności — drzewo z dodanym uniwersalnym wierzchołkiem jest grafem planarnym o szerokości drzewowej 2. Wystarczy zatem wykazać istnienie dla dowolnego $k \in \mathbb{N}^+$ drzewa \mathcal{T}_k takiego, że $\zeta_b(\mathcal{T}_k) \geq k$. Pomocna w tym celu jest druga redukcja, dość standardowa w dziedzinie przeszukiwania grafów: w wariantach gry o niepełnej informacji można rozważać na raz wszystkie możliwe strategie złodzieja analizując (na zasadzie gry jednoosobowej) obszar w którym złodziej na danym etapie rozgrywki może przebywać. Prowadzi to do następującej, jednoosobowej gry w *wycinanie buszu*.

Niech G będzie dowolnym grafem, a $k \in \mathbb{N}^+$. Na początku *busz* rośnie w każdym wierzchołku grafu, a celem k *kosiarzy* jest usunąć go w pełni. W każdej rundzie kosiarze wybierają k wierzchołków i usuwają busz z domkniętego sąsiedztwa każdego z tych wierzchołków. Następnie busz odrasta porastając wierzchołki sąsiadujące z tymi w których wciąż rośnie. Niech *liczba buszowa* grafu G , oznaczona przez $B(G)$, oznacza najmniejszą liczbę k kosiarzy dla której istnieje strategia usunięcia buszu. Oczywiście wybierając

dowolny zbiór dominujący kosiarze usuną cały busz w jednej rundzie, stąd liczba buszowa jest poprawnie zdefiniowana i zachodzi $B(G) \leq \gamma(G)$, gdzie $\gamma(G)$ oznacza liczbę dominującą grafu G . Ten model jest powiązany z grą lokalizacyjną o widoczności 1 w następujący sposób: oczywistą (skuteczną) strategią złodzieja jest chować się w buszu.

Obserwacja 2.3.5 ([H5], Proposition 5). *Dowolny graf G spełnia $B(G) \leq \zeta_b(G)$.*

Do wykazania pozostało zatem istnienie drzewa o dowolnie dużej liczbie buszowej.

Twierdzenie 2.3.6 ([H5], Theorem 8). *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}^+$ istnieje drzewo \mathcal{T}_k takie, że $B(\mathcal{T}_k) \geq k$.*

Wskazane drzewo \mathcal{T}_k powstaje przez dwukrotną subdywizję (umieszczenie dwóch nowych wierzchołków na każdej krawędzi) drzewa T_{6k}^k — pełnego drzewa $(12k+1)$ -arnego o wysokości $6k$. użytym narzędziem jest wykazanie [H5, Lemma 7], że przy dowolnym (niekoniecznie poprawnym!) kolorowaniu wierzchołków drzewa T_{6k}^k dwoma kolorami (kolory oznaczają busz i czyste wierzchołki) w taki sposób, że liczby wierzchołków pokolorowanych każdym kolorem różnią się nieznacznie (o mniej niż $6k$) istnieje duże (wielkości co najmniej $6k$) dwukolorowe skojarzenie. Innymi słowy: gdyby przypuścić (nie wprost), że udało się oczyścić z buszu całe drzewo \mathcal{T}_k to uzyska się sprzeczność: w połowie tej operacji busz odrasta na większej liczbie wierzchołków niż może zostać wycięty.

Dowód Twierdzenia 2.3.3 jest dużo mniej wyszukany: wystarczyło pokazać, w jaki sposób wykorzystać ustaloną dekompozycję ścieżkową grafu, posiadającą pewne naturalne własności i zaobserwowaniu, że dowolną inną dekompozycję da się łatwo przekształcić do pożądaney.

2.4 Problem strażaka na grafach planarnych

Opisany powyżej model wycinania buszu jest zbliżony do zaproponowanego przez Hartnella [17] problemu strażaka na grafie: niech G będzie dowolnym grafem, $r \in V(G)$ a $k \in \mathbb{N}^+$. Przypuśćmy, że w grafie G , w wierzchołku r wybuchł pożar. Pożar rozprzestrzenia się z szybkością 1, to znaczy w każdej kolejnej rundzie płonąć zaczynają wierzchołki sąsiednie do już płonących. W każdej rundzie strażacy mogą zabezpieczyć przed pożarem k dowolnie wybranych wierzchołków, a zabezpieczenie jest trwałe: zabezpieczony wierzchołek jest niepalny i nie przenosi pożaru do końca rozgrywki. Model

ten ma duże znaczenie przy rozpatrywaniu bezpieczeństwa sieci, propagacji wirusów etc. Optymalna strategia strażaków często jest nietrywialna, co więcej ustalenie jaką część grafu uda się ocalić z pożaru jest problemem NP-trudnym nawet dla wydawałoby się prostych zagadnień ($k = 1$ i drzewa binarne). Przegląd wyników można znaleźć w [11].

Warto zauważyć, że to jaką część grafu uda się ocalić mocno zależy od wyboru wierzchołka startowego r . Dla przykładu w gwieździe (graf $K_{1,n}$ dla $n \in \mathbb{N}^+$, $n > k$) gdy pożar wybuchnie w wierzchołku centralnym ocalić uda się tylko k wierzchołków, gdy zaś wybuchnie w liściu — n z nich, nawet przy $k = 1$. Dlatego Cai i Wang [4] zdefiniowali następujący parametr grafowy: k -wskaźnik przeżywalności (k -surviving rate) $\rho_k(G)$ jako średnią wielkość frakcji wierzchołków grafu, którą uda się ocalić z pożaru k strażakom

$$\rho_k(G) = \frac{1}{|V(G)|^2} \sum_{v \in V(G)} sn_k(G, v),$$

gdzie $sn_k(G, v)$ jest liczbą wierzchołków grafu G jaką może ocalić k strażaków, gdy pożar wybuchnie w wierzchołku $v \in V(G)$.

Ponieważ strażacy nie są ograniczeni strukturą grafu łatwo widać, że parametr $\rho_k(G)$ jest nierosnący z uwagi na dodawanie krawędzi do grafu. Nie jest więc zaskoczeniem powiązanie go z gęstością grafu. Prałat [28, 29] podał wartość progową na średni stopień grafu, który gwarantuje dodatni wskaźnik przeżywalności przy ustalonej liczbie strażaków k . Formalnie, dla $k \in \mathbb{N}^+$ zdefiniujmy

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{30}{11} & \text{dla } k = 1 \\ k + 2 - \frac{1}{k+2} & \text{dla } k \geq 2. \end{cases}$$

Wówczas istnieje stała $c > 0$ taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$, dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$ i dowolnego grafu G o n wierzchołkach i co najwyżej $(\tau_k - \varepsilon)n/2$ krawędziach zachodzi $\rho_k(G) > c \cdot \varepsilon > 0$. Co więcej, istnieją rodziny grafów ze średnim stopniem dążącym do τ_k oraz k -wskaźnikiem przeżywalności dążącym do 0, co pokazuje, że powyższe oszacowanie jest najlepsze z możliwych. W szczególności wynik Prałata implikuje, że grafy ze średnim stopniem poniżej $\frac{15}{4} - \varepsilon$ mają 2-wskaźnik przeżywalności co najmniej $\frac{8}{75}\varepsilon$.

Mimo rozstrzygnięcia w ogólnym przypadku k -wskaźnik przeżywalności jest wciąż badany dla szczególnych rodzin grafów — najważniejszy jest przypadek grafów planarnych. Cai i Wang [4] pytali o najmniejszą liczbę k taką, że $\rho_k(G) > c$ dla pewnej dodatniej stałej c i dowolnego grafu planarnego G . Łatwo widać, że $\rho_1(K_{2,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, zatem $k \geq 2$.

Kong, Wang i Zhu [19] wykazali, że $\rho_4(G) > \frac{1}{9}$ dla dowolnego grafu planarnego G . Esperet, van den Heuvel, Maffray i Sipma [10] wskazali,

że zabezpieczając 4 wierzchołki tylko w pierwszej rundzie, a w kolejnych po maksymalnie 3 również uda się ocalić dodatnią część grafu, to znaczy $\rho_{4,3}(G) > \frac{1}{2712}$. Oba te wyniki (jak większość w tej dziedzinie) korzystały z metody potencjału (discharging method) aby wykazać, że wystarczająco często w grafie planarnym pojawi się konfiguracja umożliwiająca strażakom szybkie opanowanie pożaru.

Stosując inne podejście w pracy [H2] wykazano, najlepsze jak dotąd oszacowania na wskaźnik przeżywalności dla grafów planarnych.

Twierdzenie 2.4.1 ([H2], Theorem 1.1). *Niech G będzie dowolnym grafem planarnym. Wówczas:*

$$(i) \rho_{4,2}(G) > \frac{2}{9}$$

$$(ii) \rho_3 \geq \rho_{3,2} > \frac{2}{21}.$$

Innymi słowy 3 strażaków w pierwszej i maksymalnie 2 w kolejnych rundach jest w stanie ocalić średnio więcej niż $\frac{2}{21}$ wierzchołków dowolnego grafu planarnego. Dodanie jednego strażaka do pierwszej rundy poprawia to oszacowanie do $\frac{2}{9}$.

Zostało również pokazane, że 2 strażaków wystarczy, aby ocalić dodatnią frakcję grafu planarnego bez trójkątów [10] i podobnie grafu bez indukowanych 4-, 5- lub 6-cykli [21, 20, 12]. W szczególności Esperet, van den Heuvel, Maffray i Sipma [10] udowodnili, że $\rho_2(G) > \frac{1}{723636}$ dla dowolnego nietrywialnego grafu planarnego bez trójkątów, natomiast Kong, Wang i Zhang [21] że $\rho_2(G) > \frac{1}{76}$ dla nietrywialnego grafu planarnego bez 4-cykli.

Oszacowania te zostały uogólnione (i zarazem poprawione) w pracy [H4] przez następujące

Twierdzenie 2.4.2 ([H4], Theorem 1.2). *Niech G będzie dowolnym spójnym grafem planarnym o $n \geq 2$ wierzchołkach i m krawędziach. Jeśli dla pewnego $\varepsilon \in (0, \frac{5}{2}]$ zachodzi $\frac{2m}{n} = \frac{9}{2} - \varepsilon$ wówczas*

$$\rho_2(G) \geq \begin{cases} \frac{2}{9}\varepsilon & \text{dla } \varepsilon \leq 1 \\ \frac{2}{9}\varepsilon - \frac{1}{n} & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

W szczególności, ponieważ grafy planarne bez trójkątów mają średni stopień mniejszy niż 4 i to samo zachodzi dla grafów planarnych bez 4-cykli, otrzymujemy natychmiast

Wniosek 2.4.3 ([H4], Corollary 1.3,1.4). *Niech G będzie dowolnym grafem planarnym bez trójkątów lub grafem planarnym bez 4-cykli o co najmniej 2 wierzchołkach. Wówczas*

$$\rho_2(G) > \frac{1}{9}.$$

2.4.1 Metody dowodowe

W przeciwieństwie do większości prac w dziedzinie, w których korzystając z ustalonej płaskiej reprezentacji grafu stosowano metodę potencjału, aby wykazać, że wystarczająco często występuje konfiguracja pozwalająca na szybkie ograniczenie pożaru w pracach [H2,H4] skorzystano z twierdzenia o separatorze dla grafów planarnych, dokładniej z jednego z lematów użytych do dowodu twierdzenia, mówiącego o geometrycznej strukturze separatora.

Twierdzenie Liptona–Tarjana [22] mówi, że w dowolnym grafie planarnym G istnieje taki podział zbioru wierzchołków $V(G) = V_1 \cup U \cup V_2$ na trzy rozłączne podzbiory, że każdy ze zbiorów V_1, V_2 zawiera mniej niż $\frac{2}{3}$ liczby wierzchołków grafu, zbiór U — nie więcej niż $\sqrt{8|V(G)|}$ oraz każda ścieżka prowadząca z wierzchołka z V_1 do wierzchołka w V_2 przechodzi przez jakiś element zbioru U . Czyli U jest małym *separatorem* dzielącym zbiór wierzchołków grafu G na dwie, mniej więcej równe, części. Mały rozmiar zbioru U pozwala na tworzenie efektywnych algorytmów dla grafów planarnych metodą „dziel i zwyciężaj”.

Istotny, z punktu widzenia problemu strażaka, jest kształt separatora, o którym mówi [22, Lemma 2]. Lemat ten, przeformułowany na potrzeby rozważanego problemu przyjmuje postać

Lemat 2.4.4 ([H4], Lemma 2.1). *Niech G będzie dowolnym grafem płaskim o n wierzchołkach ($n \geq 2$). Niech T będzie dowolnym drzewem spinającym G . Wówczas istnieje łuk \tilde{uv} między dwoma wierzchołkami $u, v \in V(G)$, nie przecinający żadnej krawędzi z $E(G)$ taki, że jednoznaczna krzywa Jordana C , złożona z \tilde{uv} oraz krawędzi drzewa T , ma tę własność, że liczba wierzchołków G w wewnętrznym obszarze ograniczonym C jak i w zewnętrznym jest mniejsza niż $\frac{2}{3}n$.*

Faktycznie oryginalny lemat przyjmuje kształt bliższy podanemu w [H2, Lemma 2.1]: rozważany jest spinający nadgraf H grafu G będący płaską triangulacją a lemat gwarantuje istnienie krawędzi uv o opisanej własności. Można zatem rozpatrywać łuk \tilde{uv} jako krawędź pewnego planarnego nadgrafu grafu G , podczas gdy uv może ale nie musi być krawędzią G . Konstrukcja krzywej C można wyobrazić sobie następująco: dla dowolnego wierzchołka $r \in V(G)$ rozważmy dwie ścieżki w drzewie T — jedną z r do u , drugą z r do v . Niech z będzie ostatnim wspólnym wierzchołkiem na obu ścieżkach. Wówczas krzywa C jest zbudowana z T -ścieżki z z do u , łuku \tilde{uv} i T -ścieżki z v do z .

Strategia strażaków jest następująca. Niech G będzie n -wierzchołkowym grafem płaskim. Przypuśćmy, że pożar wybuchł w wierzchołku $r \in V(G)$. Rozważmy drzewo T powstałe przez algorytm przechodzenia grafu wszerek poczynszy od wierzchołka r . Zgodnie z Lematem 2.4.4 istnieje łuk \widetilde{uv} łączący wierzchołki u i v wyznaczający krzywą Jordana C taką, że zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz niej jest więcej niż $\frac{n}{3}$ wierzchołków (wliczając wierzchołki leżące na krzywej do obu obszarów). Zauważmy, że krzywa ta jest skonstruowana z dwóch najkrótszych ścieżek $r = u_0, u_1, \dots, u_i = u$ oraz $r = v_0, v_1, \dots, v_j = v$ po ewentualnym usunięciu wspólnego fragmentu na początku obu ścieżek. Zatem krzywa C zawiera co najwyżej po 2 wierzchołki w danej odległości od r . Podstawowa strategia strażaków polega na obronie w k -tej rundzie algorytmu wierzchołków u_k i v_k . Gdy wierzchołek r nie należy do krzywej C pozwala to ocalić wszystkie wierzchołki z wnętrza lub zewnątrz krzywej (zauważmy, że określenie wewnątrz i zewnątrz zależą od wyboru rysunku grafu). Gdy wierzchołek r należy do krzywej — strategia ochrony wzdłuż separatora może nie wystarczyć, gdyż pożar może rozprzestrzeniać się przez sąsiadów r zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz krzywej. Ale jeden z tych obszarów zawiera nie więcej niż $\lfloor \frac{\deg r - 2}{2} \rfloor$ sąsiadów r , co daje natychmiast Lemat 2.4.5. Odnotujmy, że podobny lemat udowodniono w pracy [13], gdzie rozważano problem pożarów na grafach planarnych w nieco innym ujęciu — od strony algorytmów aproksymacyjnych.

Lemat 2.4.5 ([H2,H4], Lemma 2.2). *Niech G będzie n -wierzchołkowym grafem płaskim, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$. Przypuśćmy, że pożar wybuchł w pewnym wierzchołku r . Wówczas zabezpieczając $2 + \lfloor \frac{\deg r - 2}{2} \rfloor$ w pierwszej rundzie i po 2 w każdej kolejnej można ocalić więcej niż $\frac{1}{3}n - 1$ wierzchołków.*

Możliwe jest, pod pewnymi warunkami, zmniejszenie liczby strażaków w pierwszej rundzie, kosztem zmniejszenia liczby ratowanych wierzchołków. Mówią o tym następujące lematy.

Lemat 2.4.6 ([H2, Lemma 2.4]). *Niech G będzie n -wierzchołkową płaską triangulacją, gdzie $n \geq 18$. Przypuśćmy, że pożar wybuchł w wierzchołku r stopnia 6 lub 7. Wówczas zachodzi*

$$sn_{3,2}(G, r) > \begin{cases} \frac{1}{4}n - 1 & \text{gdy } \deg(r) = 6 \\ \frac{1}{6}n - 1 & \text{gdy } \deg(r) = 7 \end{cases}$$

lub wierzchołek r ma dwóch współsąsiadów, u i v takich, że $sn_{3,2}(G, u) > \frac{1}{3}n$ i $sn_{3,2}(G, v) > \frac{1}{3}n$.

Lemat 2.4.7 ([H4], Lemma 3.2). *Niech G będzie n -wierzchołkowym grafem płaskim, gdzie $n \geq 5$. Niech $r \in V(G)$ będzie wierzchołkiem stopnia 4 z co najwyżej jednym sąsiadem stopnia wyższego niż 5. Wówczas*

$$sn_2(G, r) > \frac{1}{6}n - 1.$$

Oszacowania podane w twierdzeniach 2.4.1 i 2.4.2 wynikają z powyższych lematów i formuły Eulera na liczbę wierzchołków i krawędzi w grafie planarnym, a najłatwiej je wykazać korzystając z programowania liniowego.

Rozdział 3

Opis pozostałych osiągnięć naukowo badawczych

Publikacje w czasopismach znajdujących się w bazie JCR

- [B1] P. Gordinowicz, On graphs isomorphic to their neighbour and non-neighbour sets, *European Journal of Combinatorics*, **31** (2010), 1419–1428.
- [B2] A. Bonato, P. Gordinowicz, P. Prałat, Bounds and construction for n-e.c. tournaments, *Contributions to Discrete Mathematics*, **5** (2010), 52–66.
- [B3] P. Gordinowicz, P. Prałat, The first player wins the one-colour triangle avoidance game on 16 vertices, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **32** (2012), 181–185.
- [B4] P. Gordinowicz, R. Nowakowski, P. Prałat, POLISH-or-Let’s play the cleaning game, *Theoretical Computer Science*, **463** (2012), 123–132.
- [B5] G. Andrzejczak, P. Gordinowicz, On automorphisms of the countable p.e.c. graph, *Discrete Mathematics*, **313** (2013), 1206–1211.
- [B6] A. Bonato, P. Gordinowicz, W. Kinnersley, P. Prałat, The capture time of the hypercube, *Electronic Journal of Combinatorics*, **20** (2013), #P24, 12pp.
- [B7] D. Bryant, N. Francetić, P. Gordinowicz, D. Pike, P. Prałat, Brushing without capacity restrictions, *Discrete Applied Mathematics*, **170** (2014), 33–45.

- [B8] A. Bonato, P. Gordinowicz, G. Hahn, Cops and Robbers ordinals of cop-win trees, *Discrete Mathematics*, **340** (2017), 951–956.
- [B9] P. Gordinowicz, P. Prałat, Small on-line Ramsey numbers — a new approach, *Contributions to Discrete Mathematics*, przyjęte do druku.
- [B10] Sz. Głąb, P. Gordinowicz, F. Strobín, Dense free subgroups of automorphism groups of homogeneous partially ordered sets, *Forum Mathematicum*, przyjęte do druku, <https://doi.org/10.1515/forum-2017-0162>.

Pozostałe publikacje naukowe

- [C1] P. Gordinowicz, Quick Max-Flow Algorithm, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, **8** (2009), 19–34.
- [C2] P. Gordinowicz, P. Prałat, The search for the smallest 3-e.c. graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **74** (2010), 129–142.
- [C3] A. Bonato, S. Finbow, P. Gordinowicz, A. Haidar, W. Kinnersley, D. Mitsche, P. Prałat, L. Stacho, The robber strikes back, *Computational Intelligence, Cyber Security and Computational Models; Advances in Intelligent Systems and Computing*, **246** (2014), 3–12.
- [C4] B. Bosek, P. Gordinowicz, J. Grytczuk, N. Nisse, J. Sokół, M. Śleszyńska-Nowak, Centroidal localization game, wysłane do *Electronic Journal of Combinatorics*, arXiv:1711.08836

Wybrane wyniki z pracy [C4] zostały zaprezentowane w poprzednim rozdziale, jako uzupełnienie pracy [H5]. Pozostałe prace zostały opisane poniżej, z podziałem na ich tematykę. Manuskrypty wszystkich prac są dostępne na stronie internetowej http://im0.p.lodz.pl/~pgordin/?page_id=10.

3.1 Grafy o dobrze rozszerzających się sąsiedztwach i granice Fraïsségo struktur relacyjnych

Prace będące podstawą doktoratu

Tematyką doktoratu były grafy o własnościach zbliżonych do słynnego grafu *Rado*. Graf ten jest, z dokładnością do izomorfizmu, jedynym przeliczalnym, jednorodnym, uniwersalnym grafem. Jest też grafem określonym

jednoznacznie przez własność egzystencjalnej domkniętości: dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków A i B istnieje wierzchołek x , połączony ze wszystkimi wierzchołkami ze zbioru A i z żadnym ze zbioru B . Badanie grafu Rado, z powodu wielu jego interesujących własności, stanowi istotny nurt współczesnej teorii grafów. W szczególności jest on granicą Fraïsségo rodziny wszystkich skończonych grafów.

Graf Rado posiada m.in. następującą własność dziedziczenia: sąsiedztwo oraz przeciwsąsiedztwo każdego z jego wierzchołków indukuje podgraf izomorficzny z całym grafem. Praca [B1] przedstawia rozwiązanie problemu Bonato [5, Problem 20], pokazując konstrukcję nieizomorficznego z grafem Rado grafu \mathcal{G} o własności dziedziczenia i analogiczną konstrukcję turnieju nieizomorficznego z granicą Fraïsségo rodziny skończonych turniejów (tu własność dziedziczenia, podobnie jak własność egzystencjalnej domkniętości określają sąsiedztwa wejściowe i wyjściowe dowolnego wierzchołka).

Własność egzystencjalnej domkniętości ma naturalny odpowiednik pozwalający rozważać grafy skończone — poprzez ograniczenie rozmiaru sumy zbiorów A i B przez ustalone $n \in \mathbb{N}$ można badać określone w ten sposób grafy n -domknięte. Praca [C2] poprawia dolne oszacowanie rozmiaru minimalnego grafu 3-domkniętego z 20 na 24 — dowód polegał na wykazaniu z użyciem superkomputera nieistnienia grafu o mniejszej niż 24 liczbie wierzchołków, który spełniałby warunek konieczny 3-domkniętości. Praca [B2] przedstawia analogiczne poszukiwanie małych turniejów 3-domkniętych: istnieje jeden (z dokładnością do izomorfizmu), znany wcześniej, turniej 3-domknięty na 19 wierzchołkach, kolejny ma co najmniej 23 wierzchołki. Oprócz tego praca [B2] przedstawia kilka nowych konstrukcji turniejów n -domkniętych.

Prace powstałe po uzyskaniu doktoratu

Praca [B5] stanowi uzupełnienie pracy [B1] o odpowiedź na pytanie (zadane podczas obrony pracy doktorskiej), które izomorfizmy między skończonymi podgrafami grafu \mathcal{G} rozszerzają się do automorfizmów grafu; wiadomo bowiem, że nie jest on jednorodny.

W pracy [B10] studiowane są pewne topologiczne własności grup automorfizmów przeliczalnych, jednorodnych zbiorów częściowo uporządkowanych. Korzystając z charakteryzacji Schmerla [32] udowodniono w niej, że w każdym przypadku istnieje wolna, gęsta, 2-generowalna podgrupa grupy automorfizmów.

3.2 Gry pościgowe cz. 2

W pracy [26] wprowadzającej grę w policjanta i złodzieja Nowakowski i Winkler podali dwie charakteryzacje grafów policyjnych. Pierwsza została opisana w poprzednim rozdziale, druga — była następująca. Rozważmy ciąg relacji $(\leq_\alpha)_\alpha$ na $V(G)$ określony następująco

- (i) $u \leq_0 v$, gdy $u = v$
- (ii) $u \leq_i v$, gdy $\forall x \in N[u] \exists y \in N[v] \exists j < i \quad x \leq_j y$.

Interpretacja tej relacji jest następująca: jeżeli, dla pewnego $i \in \mathbb{N}$ oraz pewnych wierzchołków $u, v \in V(G)$ zachodzi $u \leq_i v$ to policjant w wierzchołku v ma strategię złapania złodzieja stojącego w wierzchołku u po co najwyżej i rundach rozgrywki. Opisywany ciąg relacji jest rosnący do pewnego momentu a później stały, co jest oczywiste dla grafów skończonych. Co więcej, dla grafów nieskończonych działa to analogicznie — należy tylko rozpatrywać pozaskończony ciąg relacji. W obu sytuacjach istnieje najmniejsza liczba porządkowa κ taka, że $\leq_\kappa = \leq_{\kappa+1}$. Nazwijmy ją liczbą CR-porządkową (CR-ordinal) i oznaczmy $\kappa(G)$.

Twierdzenie 3.2.1 ([26] (uogólnienie, por. [B8])). *Relacja \leq_κ (G) jest pełna wtedy i tylko wtedy gdy G jest grafem policyjnym.*

Przy rozważaniu tej charakteryzacji dla grafów nieskończonych warto odnotować jedną istotną rzecz: indeks relacji (a zatem i liczba CR-porządkowa) informuje o czasie rozgrywki wyłącznie wtedy, gdy jest skończony. Sytuacja, w której zachodzi $u \leq_\alpha v$ dla nieskończonej liczby porządkowej α , a nie zachodzi dla relacji będących na wcześniejszych pozycjach w ciągu oznacza, że czas rozgrywki przy policjancie w v a złodzieju w u będzie wprawdzie skończony, ale nieograniczony. Czyli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ złodziej będzie mieć strategię na przetrwanie k rund, ale dla każdej strategii złodzieja będzie istnieć $\ell \in \mathbb{N}$, że grając według tej strategii zostanie złapany po ℓ rundach.

Przykładem rodziny nieskończonych grafów policyjnych są drzewa pozabawione nieskończonych ścieżek. W pracy [B8] udowodniono następujące

Twierdzenie 3.2.2 ([B8], Theorem 3.1). *Zbiór liczb CR-porządkowych dla drzew policyjnych jest postaci:*

$$\mathbb{N} \cup \{ \alpha + \omega : \alpha \text{ jest liczbą graniczną} \}.$$

Ponadto podano konstrukcje rodziny grafów policyjnych $\{H_i^j\}_{i=0}^\infty$ dla $j \in \mathbb{N}^+$ taką, że $\kappa(H_i^j) = \omega \cdot j + (i + j)$. Pytanie, jakie jeszcze mogą być liczby CR-porządkowe, pozostaje otwarte.

Z charakteryzacji Nowakowskiego–Winklera, w wypadku grafów skończonych, można oczywiście wyznaczyć optymalny czas rozgrywki (capture time) na ustalonym grafie policyjnym G : jest to najmniejsze $i \in \mathbb{N}$ dla którego istnieje wierzchołek $v \in V(G)$ taki, że $\{u \in V(G) : u \leq_i v\} = V(G)$. Analizę czasu rozgrywki, także w grze z wieloma policjantami wprowadziła praca [2]. Optymalizacja czasu rozgrywki jest również tematyką pracy [B6] w której wyznaczono z dokładnością do stałej czas rozgrywki dla hiperkostki udowadniając, że $\text{capt}(Q_n) = \Theta(n \log n)$, gdzie Q_n jest n -wymiarową hiperkostką, $n \in \mathbb{N}^+$. Wiadomo, że $c(Q_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ [23].

Praca [C3] opisuje wariant gry w policjantów i złodzieja, w którym złodziej eliminuje policjanta gdy przejdzie do wierzchołka przezeń zajmowanego. Oczywiście liczba policyjna w takim wariacie rośnie co najwyżej dwukrotnie, w pracy pokazano, że dla wielu typów grafów możliwe są lepsze oszacowania.

3.3 Szczotkowanie grafu

Model czyszczenia grafu za pomocą szczotek, zaproponowany w pracy [25] jest wariantem krawędziowego przeszukiwania grafów, którego wprowadzeniem rozpoczyna się ten autoreferat. Różnica polega na tym, że każda krawędź grafu może być przebyta tylko raz, a w związku z tym ograniczeniem początkowo rozstawia się szczotki w wybranych wierzchołkach grafu. Liczba szczotek w optymalnej konfiguracji potrzebna do wyczyszczenia całego grafu to jego liczba szczotkowa oznaczana przez $b(G)$.

Praca [B7] poświęcona jest analizie mniej restrykcyjnego wariantu szczotkowania grafu w którym wzdłuż krawędzi grafu może przejść więcej niż jedna szczotka, ale wszystkie muszą przejść jednocześnie. W pracy podano szereg oszacowań na liczbę szczotkową $B(G)$ dla tego modelu.

Z kolei praca [B4] opisuje grę między dwoma graczami polegającą na dostawianiu na zmianę szczotek w wierzchołkach grafu. W momencie kiedy w wierzchołku jest co najmniej tyle szczotek ile incydentnych, brudnych krawędzi startuje proces czyszczenia grafu. Gra kończy się, gdy cały graf zostanie wyczyszczony, a zwycięzcą jest ten z graczy, który ostatni dostawił szczotkę. Jest to więc gra kombinatoryczna typu *nim*. W pracy pokazano, między innymi, że drugi gracz wygrywa tę grę na grafie K_n dla $n \geq 3$.

3.4 Pozostałe prace

Praca [C1] powstała w wyniku rozwinięcia treści pracy magisterskiej i opisuje parametryzowalną rodzinę efektywnych algorytmów rozwiązują-

cych problem maksymalnego przepływu w sieciach.

Praca [B3] przedstawia efekt obliczeń komputerowych, które pozwoliły wykazać, że pierwszy gracz wygrywa grę w unikanie trójkątów na 16 wierzchołkach: gracze na zmianę wybierają krawędzie grafu pełnego, przegrywa ten gracz, po którego ruchu krawędzie wybrane przez obu graczy utworzą trójkąt.

Praca [B9] przedstawia wyniki komputerowych obliczeń liczb Ramsey'a on-line: jeden z graczy wskazuje krawędzie grafu, jedna po drugiej, drugi koloruje je jednym z dwóch kolorów. Gra się kończy, gdy powstanie zabroniony podgraf w wybranym kolorze. Liczba Ramsey'a on-line określa liczbę krawędzi jaką musi pokazać pierwszy gracz, żeby optymalnie grający drugi gracz był zmuszony pokolorować jednym kolorem zabroniony podgraf. W pracy ponownie zweryfikowano, że $\overline{\mathcal{R}}(K_3, K_4) = 17$ oraz wyznaczono (nieliczne były znane) liczby Ramsey'a dla grafów o nie więcej niż 4 wierzchołkach, za wyjątkiem $\overline{\mathcal{R}}(C_4, K_4)$, $\overline{\mathcal{R}}(K_4 \setminus e, K_4)$ i $\overline{\mathcal{R}}(K_4, K_4)$ dla których poprawiono dolne oszacowania. Obliczenia, podobnie jak w pracach [B2,B3,C2], wymagały pracy superkomputera oraz wsparcia środowiska nauty [24] do rozpoznawania izomorfizmów grafów.

Bibliografia

- [1] M. Aigner, M. Fromme, A game of cops and robbers, *Discrete Applied Mathematics* **8** (1984), 1–12.
- [2] A. Bonato, G. Hahn, P.A. Golovach, J. Kratochvíl, The capture time of a graph, *Discrete Mathematics* **309** (2009) 5588–5595.
- [3] R.L. Breisch, An intuitive approach to speleotopology, *Southwestern Cavers* **6** (1967), 72–78.
- [4] L. Cai, W. Wang, The surviving rate of a graph for the firefighter problem, *SIAM J. Discrete Math.* **23** (2009) 1814–1826.
- [5] P. J. Cameron, Research problems from the 18th British Combinatorial Conference. The 18th British Combinatorial Conference (Brighton, 2001). *Discrete Mathematics* **266** (2003), 441–451.
- [6] J. Carraher, I. Choi, M. Delcourt, L. H. Erickson, D. B. West, Locating a robber on a graph via distance queries, *Theoretical Computer Science* **463** (2012), 54–61.
- [7] E. Chiniforooshan, A better bound for the cop number of general graphs, *Journal of Graph Theory*, **58** (2008) 45–48.
- [8] D. Dereniowski, D. Dyer, R.M. Tifenbach, B. Yang, Zero-Visibility Cops and Robber Game on a Graph. *Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management Lecture Notes in Computer Science* **7924** (2013) 175–186.
- [9] R. Diestel, *Graph Theory, 3rd edition*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 2005.
- [10] L. Esperet, J. van den Heuvel, F. Maffray, F. Sipma, Fire containment in planar graphs *J. Graph Theory* **73** (2013) 267–279.
- [11] S. Finbow, G. MacGillivray, The firefighter problem: a survey of results, directions and questions, *Australasian Journal of Combinatorics* **43** (2009) 57–77.
- [12] S. Finbow, J. Kong, W. Wang, The 2-surviving rate of planar graphs without 6-cycles, *Theoret. Comput. Sci.* **518** (2014) 22–31.
- [13] P. Floderus, A. Lingas, M. Persson, Towards more efficient infection and fire fighting, *International Journal of Foundations of Computer Science* **24** (2013) 3–14.

-
- [14] F.V. Fomin, D.M. Thilikos, An annotated bibliography on guaranteed graph searching, *Theoretical Computer Science* **399** (2008), 236–245.
- [15] P. Frankl, Cops and robbers in graphs with large girth and Cayley graphs, *Discrete Applied Mathematics* **17** (1987) 301–305.
- [16] F. Harary, R. A. Melter, On the metric dimension of a graph, *Ars Combin.* 2, pp. 191–195 (1976).
- [17] B. Hartnell, Firefighter! An application of domination, Presentation at the 25th Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing, University of Manitoba, Winnipeg, Canada, 1995.
- [18] J. Haslegrave, R.A.B. Johnson, S. Koch, Locating a robber with multiple probes, *Discrete Mathematics* **341** (2018), 184–193.
- [19] J. Kong, W. Wang, X. Zhu, The surviving rate of planar graphs, *Theoret. Comput. Sci.*, **416** (2012) 65–70.
- [20] J. Kong, W. Wang, T. Wu, The 2-surviving rate of planar graphs without 5-cycles, *J. Comb. Optim.*, **31** (2016) 1479–1492.
- [21] J. Kong, W. Wang, L. Zhang, The 2-surviving rate of planar graphs without 4-cycles, *Theoret. Comput. Sci.* **457** (2012) 158–165.
- [22] R. J. Lipton, R. E. Tarjan, A Separator Theorem for Planar Graphs, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **36** (1979), 177–189.
- [23] M. Maamoun, H. Meyniel, On a game of policemen and robber, *Discrete Applied Mathematics* **17** (1987) 307–309.
- [24] B.D. McKay and A. Piperno, *Practical Graph Isomorphism*, II, *J. Symbolic Computation* (2013) **60** 94–112.
- [25] M.-E. Messinger, R. J. Nowakowski, and P. Prałat, Cleaning a network with brushes, *Theoretical Computer Science* **399** (2008), 191–205.
- [26] R. J. Nowakowski, P. Winkler, Vertex-to-vertex pursuit in a graph, *Discrete Mathematics* **43** (1983), 235–239.
- [27] T.D. Parsons, Pursuit-evasion in a graph, Theory and applications of graphs, *Lecture Notes in Math.*, **642** (1978) 426–441.
- [28] P. Prałat, Graphs with average degree smaller than $30/11$ burn slowly, *Graphs and Combinatorics*, **30** (2014), 455–470.
- [29] P. Prałat, Sparse graphs are not flammable, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **27** (2013), 2157–2166.
- [30] A. Quilliot. Jeux et pointes xes sur les graphes. Th ese de 3 eme cycle, Universit e de Paris VI, pp. 131–145 (1978).
- [31] A. Quilliot, A short note about pursuit games played on a graph with a given genus, *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **38** (1985) 89–92.

- [32] J.H. Schmerl, Countable homogeneous partially ordered sets. *Algebra Universalis* **9** (1979), no. 3, 317–321.
- [33] B. S. W. Schroeder, The copnumber of a graph is bounded by $\lfloor \frac{3}{2} \text{genus}(G) \rfloor + 3$, *Categorical perspectives*, Trends Math., Birkhäuser Boston, 2001, 243–263.
- [34] S. Seager, Locating a robber on a graph, *Discrete Mathematics* **312** (2012), 3265–3269.
- [35] S. Seager, Locating a backtracking robber on a tree, *Theoretical Computer Science* **539** (2014), 28–37.
- [36] N. Robertson, P.D. Seymour, Graph minors. I. Excluding a forest, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **35** (1983) 39–61.
- [37] N. Robertson, P.D. Seymour, Graph minors. III. Planar tree-width, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **36** (1984) 49–64.
- [38] P. D. Seymour, R. Thomas, Graph searching and a min–max theorem for tree-width, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **58** (1993), 22–33.
- [39] M. Woźniak i inni, Słownik angielsko-polski w zakresie teorii grafów, <http://wms.mat.agh.edu.pl/%7Emd/ang-pol.pdf> [dostęp 25.05.2018]

Gordian