

Lublin, 27 sierpnia 2018 r.

Prof. dr hab. Maria Nowak
Instytut Matematyki UMCS
20-031 Lublin
Pl. M. Curie-Skłodowskiej 1

Recenzja osiągnięcia naukowego “Zbiory Koebego i zbiory pokrycia dla klas funkcji analitycznych” oraz dorobku naukowego w postępowaniu habilitacyjnym dr. Pawła Zaprawy

Pan dr Paweł Zaprawa jest absolwentem Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej z 1991 roku. W 1999 roku uzyskał on stopień doktora nauk matematycznych na Wydziale Fizyki Technicznej i Informatyki Politechniki Łódzkiej. Promotorem jego rozprawy doktorskiej “Zagadnienia ekstremalne w klasach funkcji typowo-rzeczywistych” był dr hab. Leopold Koczan. Od 2000 roku Pan dr Zaprawa pracuje na etacie adiunkta na Politechnice Lubelskiej. Po uzyskaniu stopnia doktora Pan Zaprawa opublikował ponad 30 artykułów naukowych z teorii funkcji jednej zmiennej zespolonej, w większości w punktowanych czasopismach Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Przejdę obecnie do krótkiego merytorycznego omówienia prac Pana dr Zaprawy składających się na osiągnięcie naukowe **“Zbiory Koebego i zbiory pokrycia dla klas funkcji analitycznych”**. Jest to 9 prac opublikowanych w latach 2005–2017 ([H1]–[H9] w załączonym spisie). Są to w większości publikacje wspólne z L. Koczanem, tylko dwie publikacje są autorstwa samego Habilitanta. Załączone przez Habilitanta omówienie najważniejszych wyników tych prac zawiera również krótki rys historyczny dotyczący zagadnień związanych z tematem tego opracowania, czyli zbiorami Koebego i zbiorami pokrycia dla klas funkcji analitycznych.

Wszystkie załączone w opracowaniu publikacje dotyczą, ogólnie mówiąc, rodziny funkcji analitycznych w kole jednostkowym Δ płaszczyzny zespolonej. W rodzinie tych funkcji wyróżnia się wiele jej klas, na przykład, poprzez narzucenie warunku jednolistności, pewnych unormowań, warunków na współczynniki taylorowskie. Również często wyróżnione klasy funkcji są opisywane przez własności geometryczne obszarów będących obrazami koła Δ poprzez funkcje z tej klasy, np. klasa funkcji wypukłych, gwiazdzistych,

prawie wypukłych, czy wypukłych w danym kierunku. Niewątpliwie najbardziej znaną klasą takich funkcji jest klasa \mathcal{S} funkcji f jednolistnych w Δ z normalizacją $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Postawiona w 1916 roku przez L. Bieberbacha hipoteza, że jeśli $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$, to $|a_n| \leq n$ miała przez wiele lat ogromny wpływ na rozwój teorii funkcji jednej zmiennej, w tym również geometrycznej teorii funkcji. Była ona obiektem zainteresowania wielu znamienitych matematyków, którzy tworzyli teorie z nią związane. Hipoteza ta została ostatecznie udowodniona w 1985 roku przez L. de Brangesa.

Habilitant koncentruje się (zgodnie z tytułem osiągnięcia naukowego) na zagadnieniach związanych ze zbiorami Koebeego i zbiorami pokrycia dla różnych klas funkcji analitycznych w kole jednostkowym Δ . Zbiór Koebeego $K_{\mathcal{A}}$ i zbiór pokrycia $L_{\mathcal{A}}$ dla klasy \mathcal{A} definiujemy wzorami:

$$K_{\mathcal{A}} = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} f(\Delta), \quad L_{\mathcal{A}} = \bigcup_{f \in \mathcal{A}} f(\Delta).$$

Trzy pierwsze publikacje [H1]–[H3] są związane z klasą funkcji typowo-rzeczywistych \mathcal{T} . Jest to klasa funkcji f analitycznych w Δ z normalizacją $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, które przyjmują wartości rzeczywiste na odcinku osi rzeczywistej $(-1, 1)$, a dla $z \in \Delta \setminus (-1, 1)$ spełniają warunek $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0$. Klasa \mathcal{T} została wprowadzona przez W. Rogosinskiego 1932, ale również istotne własności tej klasy zostały opisane w pracy G.M. Gołuzina z 1950 roku. Klasa ta zawiera funkcje klasy \mathcal{S} o współczynnikach rzeczywistych. Każda funkcja klasy \mathcal{T} może być przedstawiona za pomocą całki Stieltjesa

$$f(z) = \int_{-1}^1 k_t(z) d\mu(t), \quad z \in \Delta, \quad (1)$$

gdzie $k_t(z) = z/(1 - 2tz + z^2)$, a μ jest miarą probabilistyczną na przedziale $[-1, 1]$. W 1950 roku G.M. Gołuzin wykazał m.in., że chociaż funkcje klasy \mathcal{T} nie muszą być jednoliste w Δ , to są one jednoliste na podzbiorze koła Δ w kształcie soczewki H , którego brzeg stanowią łuki okręgów $|z \pm i| = \sqrt{2}$. Gołuzin wyznaczył również dla ustalonego $z \in \Delta$ zbiór $K(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{T}\}$. W publikacji [H1] autorzy nawiązują do wyżej wspomnianych wyników. Wprowadzają oni pojęcie zbioru Koebeego oraz obszaru pokrycia dla rodziny \mathcal{A} funkcji analitycznych w Δ nad zbiorem $D \subset \Delta$ zdefiniowanych odpowiednio wzorami

$$K_{\mathcal{A}}(D) = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} f(D) \quad \text{oraz} \quad L_{\mathcal{A}}(D) = \bigcup_{f \in \mathcal{A}} f(D).$$

W pracy [H1] wykazano, między innymi, że $L_{\mathcal{T}}(H) = \mathbb{C}$ oraz $K_{\mathcal{T}}(H) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4}\}$, gdzie H oznacza opisany powyżej podzbiór koła Δ . W pracy [H2] badana jest podklasa $TR(1/2)$ funkcji typowo-rzeczywistych. Funkcje tej podklasy opisane są wzorem (1), przy czym w tym wypadku $k_i(z) = z/(1 - 2tz + z^2)^{1/2}$. Klasa $TR(1/2)$ pokrywa się z otoczką wypukłą klas funkcji 1/2-gwiazdzistych i wypukłych. W pracy tej, m.in., wyznaczone zostały zbiory $K_{TR(1/2)}(|z| < r)$ i $K_{TR(1/2)}(H)$.

W 1977 roku A.W. Goodman wyznaczył zbiór Koebego dla klasy \mathcal{T} . W pracy [H3] autorzy nawiązują do tego wyniku i przedstawiają inny, bardziej elementarny, dowód tego wyniku Goodmana. Następnie stosując podobną metodę wyznaczają obszary Koebego dla pewnych podklas klasy \mathcal{T} ; między innymi klasy funkcji typowo-rzeczywistych i ograniczonych.

W pracach [H4]–[H6] oraz [H8]–[H9] wyznaczone zostały zbiory Koebego i zbiory pokrycia dla bardzo dla specjalnych podklas klasy \mathcal{S} . W dowodach otrzymanych twierdzeń często konstruowana jest rodzina tzw. obszarów ekstremalnych dla danej klasy, a następnie funkcje z tej klasy odwzorowujące Δ na te obszary ekstremalne. Przy konstrukcji tych funkcji istotną rolę odgrywa zasada podporządkowania i własności geometryczne obrazów koła jednostkowego poprzez funkcje z danej klasy. W [H4] autorzy badają klasę $X^{(n)}$ funkcji n -symetrycznych, o współczynnikach rzeczywistych i wypukłych w kierunku osi rzeczywistej, Wyznaczają dla tej klasy zbiór Koebego i zbiór pokrycia. Zbiory te są wyrażone za pomocą obrazów koła jednostkowego poprzez funkcje, które zostały wyznaczone ze wzorów Schwarza-Christoffela. Wyniki te są analogonami wyników z wcześniejszej publikacji [P9] oraz innych publikacji niewchodzących do zasadniczego osiągnięcia naukowego Habilitanta. W pracy [H8] autorzy wyznaczają zbiory Koebego i zbiory pokrycia dla klasy $\mathcal{F}^{(n)}$ funkcji n -symetrycznych, wypukłych w kierunku osi rzeczywistej (o dowolnych współczynnikach). Wydaje się, że pewną inspiracją do tych badań była publikacja J. Krzyża i M. Reade'a "Koebe domains for certain classes of analytic functions", *Journal d'Analyse Mathématique* (1967). Również w tej pracy J.Krzyż i M. Reade wyznaczyli zbiory Koebego dla podklasy Y klasy \mathcal{S} , której elementami są funkcje o współczynnikach rzeczywistych odwzorowujące Δ na obszar koło-symetryczny względem dodatniej osi rzeczywistej. W pracy [H6] Habilitant rozwiązuje analogiczny problem dla klas $Y \cap K(i)$ i $Y \cap S^*$ gdzie $K(i)$ oznacza podklasę funkcji wypukłych w kierunku osi urojonej, a S^* podklasę funkcji gwiazdzistych. Podobna technika jest zastosowana również w pracy [H9], gdzie autorzy wyznaczają zbiory Koebego dla podklasy \mathcal{K}_α klasy \mathcal{S} , której elementami są funkcje odwzorowujące Δ na obszar

wypukły w dwóch kierunkach: $e^{i\alpha\pi/2}$ i $e^{-i\alpha\pi/2}$, $\alpha \in [0, 1]$.

W publikacji [H5] autorzy koncentrują się na klasie $\Gamma(c) \subset \mathcal{S}$ funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej, o współczynnikach rzeczywistych, z ustalonym drugim współczynnikiem $a_2 = c$. Nawiązują oni do pracy L. Koczana z 1989 roku, w której został wyznaczony zbiór Koebeego dla klasy funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych.

W pracy [H7] Habilitant rozwiązuje pewne problemy związane ze zbiorami Koebeego i pokrycia dla podklas funkcji prawie gwiazdzistych. Funkcję $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ analityczną w Δ nazywamy prawie gwiazdzistą, $f \in \mathcal{CS}^*$, jeśli istnieje funkcja gwiazdzista $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ taka, że $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0$. Praca [H7] poświęcona jest w szczególności klasie $\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^* \subset \mathcal{CS}^*$, przy dodatkowym założeniu, że $g \in \mathcal{S}$ i ma współczynniki rzeczywiste. Między innymi, rozważana jest podklasa $\mathcal{H} \subset \mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*$, gdzie przyjmujemy $g(z) = z/(1 - z^2)$. Warto przy tym zwrócić uwagę, że opisana wcześniej klasa funkcji typowo-rzeczywistych \mathcal{T} jest zawarta w \mathcal{H} . Podobnie jak \mathcal{T} żadna z badanych w [H7] klas nie jest podklasą klasy funkcji jednolistnych \mathcal{S} . Autor odnosi się też do wcześniejszych prac, m.in. L. Koczana, w których wyznaczono promień jednolistności dla tych klas.

W przedstawionym opracowaniu zauważyłam dwie usterki na str. 20. Przy definicji obszarów wypukłych w kierunku należy zwrot “zbiorami zwartymi” zastąpić “zbiorami spójnymi” (podobna usterka występuje w publikacji [H9] przy definicji obszarów wypukłych w dwóch kierunkach) oraz odwzorowanie przyporządkowujące funkcji $f(z)$ funkcję symetryczną określoną wzorem $\sqrt[n]{f(z^n)}$ nie powinno być nazwane funkcjonałem.

Na pozostały dorobek naukowy dra Zaprawy (niewchodzący w skład zasadniczego osiągnięcia naukowego) składa się 25 publikacji z geometrycznej teorii funkcji analitycznych i 5 publikacji z zakresu techniki.


Znaczna część publikacji z geometrycznej teorii funkcji dotyczy również zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia dla różnych klas funkcji analitycznych oraz klasy funkcji typowo-rzeczywistych. Poza tym w publikacjach tych autorzy zajmują się m.in. oszacowaniem pewnych wyznaczników Hankela $H_2(n) = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2$ i funkcjonałów typu Fekete-Szegő dla różnych klas funkcji oraz funkcjami bi-jednolistnymi. Część z tych prac została opublikowana w czasopiśmie z listy A MNiSW. 3 prace z prac z zakresu techniki zostały opublikowane w *Applied Mechanics and Materials* czasopiśmie z listy B MNiSW.

Podsumowując uważam, że obecnie tematyka badań dr. Zaprawy nie na-

leży do głównego nurtu badań w analizie zespolonej. Niewątpliwie jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest znalezienie dowodu hipotezy Bieberbacha w 1985 roku. Najwięcej ciekawych wyników dotyczących zbiorów Koebego różnych klas funkcji analitycznych w kole jednostkowym pochodzi z lat 60-tych i 70-tych XX wieku. Autorami tych wyników są m.in. J. Jenkins, M.T. MacGregor, A.W. Goodman, J. Krzyż i M. Reade. Od tego czasu w analizie zespolonej rozwinęły się różne interesujące kierunki badań np. teoria odwzorowań quasi konforemnych, dynamika zespolona, czy teoria odwzorowań harmonicznych. Tematyka badań dr Zaprawy jest dość wąska i historycznie związana z ośrodkiem lubelskim, gdzie tą tematyką zajmowali się m.in., M. Biernacki, J. Krzyż, Z. Lewandowski, W. Szapiel i L. Koczan (promotor rozprawy doktorskiej Habilitanta). Niewątpliwie Pan dr Zaprawa ma dużą wiedzę z geometrycznej teorii funkcji analitycznych i potrafi w skuteczny sposób rozwijać tę teorię. Świadczą o tym m.in., wyniki dotyczące zbiorów Koebego dla funkcji n -symetrycznych, które są kontynuacją wyników otrzymanych w latach 60-tych oraz wyniki dotyczące ciekawej klasy funkcji typorzeczywistych.

Według AMS MathSciNet publikacje Pana dr. Zaprawy były cytowane 41 razy przez 27 matematyków.

Uważam, że publikacje dra Zaprawy wchodzące w skład osiągnięcia naukowego oraz jego pozostały dorobek naukowy spełniają w wystarczającym stopniu ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego i popieram jego wniosek o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.


Maria T. Nowak

