

dr hab. Wojciech Mydlarczyk
Katedra Informatyki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 3.01.2019 r.

Opinia o dorobku naukowym

dr Katarzyny Szymańskiej-Dębowskiej
w związku z postępowaniem habilitacyjnym
na Wydziale Fizyki Technicznej, Informatyki i
Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej

Pani dr Katarzyna Szymańska-Dębowska ukończyła magisterskie studia matematyczne w 1998 roku. Stopień naukowy doktora nauk matematycznych uzyskała na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego w roku 2006 na podstawie rozprawy "Wybrane asymptotyczne zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych" napisanej pod kierunkiem prof. dr. hab. B. Przeradzkiego. Od 1998 roku pracuje w Politechnice Łódzkiej, obecnie jako adiunkt w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej. Wniosek dr Katarzyny Szymańskiej-Dębowskiej o wszczęcie przewodu habilitacyjnego przez Radę Naukową Wydziału Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej jako **osiągnięcie naukowe** określa *Nielokalne zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego*, na które składa się cykl 7 artykułów [H.1]-[H.7] (według oznaczeń podanych w autoreferacie), opublikowanych w następujących regularnych czasopismach matematycznych:

Georgian Mathematical Journal ([H.1])
Proceedings of American Mathematical Society ([H.2])
Electronical Journal of Qualitative Theory of Differential Equations
([H.3], [H.7])
Mathematical Bohemian ([H.4])
Electronical Journal of Differential Equations ([H.5])
Journal of Differential Equations ([H.6])

Pani dr K. Szymańska-Dębowska jest samodzielną autorką 4 prac składających się na **osiągnięcie naukowe**. W pozostałych 3 pracach habilitantka jest współautorką. Stosowne zaświadczenia o procentowym udziale habilitantki w przygotowaniu tamtych prac jest załączone w dokumentacji. Tematyką prac są badania istnienia rozwiązań zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych drugiego rzędu. Według bazy Scopus dr K. Szymańska-Dębowska jest autorką lub współautorką w sumie 22 artykułów naukowych napisanych w latach 1997-2018 i w bazie odnotowano 34 cytowania jej prac (h-index =2). Choć nie są to wyniki imponujące, ale ostatnie prace, [H.5], [H.6] i [H.7] wykazują znacząco wzrastające zainteresowanie matematyków.

Habilitantka w swojej dotychczasowej działalności naukowej zajmowała się przede wszystkim zagadnieniami istnienia rozwiązań dla równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu w R^n z różnymi warunkami brzegowymi. W kręgu zainteresowań habilitantki były

równania w następującej postaci

$$u'' = f(t, u, u'),$$

gdzie $f : [0, 1] \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ jest funkcją ciągłą oraz

$$(\phi(u'))' = f(t, u, u'), \quad t \in [0, 1]$$

gdzie funkcja ϕ ma jedną z dwóch form

$$(i) \quad \phi(s) = \begin{cases} \frac{\beta(|s|)}{|s|}s, & \text{dla } s \in R^n \setminus \{0\} \\ 0, & \text{dla } s = 0 \end{cases}$$

gdzie $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest ciągłą i rosnącą, $\beta(0) = 0$, $\beta(\infty) = \infty$,

$$(ii) \quad \phi(s) = (\phi_1(s_1), \phi_2(s_2), \dots, \phi_n(s_n))$$

gdzie $\phi_i(s_i)$ jest jednowymiarową funkcją określoną wzorem (i). W ten sposób w obu przypadkach operator $(\phi(u'))'$ może być widziany jako uogólnienie klasycznego p -laplasjanu $(|u'|^{p-2}u')'$, $p > 1$.

Przejdę do omówienia prac składających się na wskazane **osiągnięcie naukowe**.

W pracy [H.1] badany jest problem istnienia rozwiązań dla układu n równań różniczkowych drugiego rzędu

$$u'' = f(t, u, u'),$$

z jednym z następujących warunków brzegowych

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_0^1 u'(s)dh(s), & u'(1) &= \int_0^1 u'(s)dg(s), \\ u(0) &= \int_0^1 u'(s)dh(s), & u(1) &= \int_0^1 u(s)dg(s), \\ u'(0) &= \int_0^1 u'(s)dh(s), & u(1) &= \int_0^1 u'(s)dg(s), \\ u'(0) &= \int_0^1 u(s)dh(s), & u(1) &= \int_0^1 u'(s)dg(s), \end{aligned}$$

gdzie $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ i $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) : R^n \rightarrow R^n$ są odwzorowaniami, których składowe są funkcjami o wahanu skończonym. Rozważane zagadnienia są nierezonansowe (habilitantka nazywa zagadnienia rezonansowymi, gdy równanie jednorodne $u'' = 0$ ma nietrywialne rozwiązania spełniające zadane warunki brzegowe).

W pracy postępuje się raczej standardowo, zagadnienie oryginalne jest formułowane w postaci równania całkowego

$$x(t) = Tx(t)$$

z operatorem całkowym T i poszukuje się rozwiązania, jako punktu stałego dla operatora pełnociągłego $T : C^1([0, 1], R^n) \rightarrow C^1([0, 1], R^n)$. W tym celu badana jest homotopia $H(\lambda, x)(t) = x(t) - \lambda T x(t)$, $\lambda \in [0, 1]$. Z przyjętych założeń o funkcji f wynikają niemal natychmiast żądane własności stopnia Leraya-Schaudera $\deg(Id - \lambda T, \Omega, 0)$, $\lambda \in [0, 1]$, gdzie Ω jest kulą $B(0, M)$ w $C^1([0, 1], R^n)$ o odpowiednio dużym promieniu M . W konsekwencji otrzymuje się istnienie rozwiązań.

Rozważane tu zagadnienia są interesujące przede wszystkim ze względu na przyjmowane nielocalne warunki brzegowe obejmujące w swoim przypadku między innymi tzw. warunki wielopunktowe.

W pracy [H.2] badane jest istnienie rozwiązań zagadnienia brzegowego

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s),$$

Określając operatory

$$Lx = x'' - x' \text{ i } Nx = f(t, x', x) - x',$$

oryginalne zagadnienie sprowadza się do zagadnienia na poszukiwanie punktu stałego $x(t) = Tx(t)$ dla operatora pełnociągłego $T = L^{-1}N$ określonego na przestrzeni $X = \{x \in C^1([0, 1], R^n) : x \text{ spełnia war. brzegowy}\}$. Dalej rozważania oparte są na zastosowaniu zasady kontynuacji Leraya-Schaudera do badania istnienia punktów stałych odwzorowania λT , $\lambda \in [0, 1]$ w odpowiednio dobranym podzbiornym wypukłym $\Omega \subset X$. Należy zwrócić uwagę na ciekawą konstrukcję zbioru Ω za pomocą zbioru wypukłego $C \subset R^n$. Pomysł takiej konstrukcji został zaczerpnięty z pracy Gustafsona i Schmitta [30].

W pracy [H.3] rozważa się ogólniejsze niż w [H.2] zagadnienie brzegowe

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = a, \quad u'(1) = N(u'),$$

gdzie $N : C([0, 1], R^n) \rightarrow R^n$ jest ciągłym odwzorowaniem (niekoniecznie liniowym). Autorzy skupili swoją uwagę na pochodnej rozwiązania $y = u'$. Określając operator

$$Ay(t) = \int_t^1 f \left(s, a + \int_0^s y(z) dz, y(s) \right) ds$$

otrzymuje się równanie $y(t) = N(y) - Ay(t)$. Dalej w zależności od przyjmowanych założeń o funkcji f bada się homotopię

$$H(\lambda, y)(t) = y(t) - N(y) + \lambda Ay(t) + \lambda(1 - \lambda) \int_t^1 y(s) ds, \quad \lambda \in [0, 1]$$

lub

$$H(\lambda, y)(t) = y(t) - \lambda N(y) + \lambda Ay(t) + \lambda(1 - \lambda) \int_t^1 y(s) ds, \quad \lambda \in [0, 1]$$

na odpowiednio dobranym zbiorze $\Omega \subset X$ (zasada konstrukcji jak w [H.2]). W konsekwencji korzystając z własności stopnia topologicznego Leraya-Schaudera otrzymuje się istnienie nietrywialnych rozwiązań.

W pracy [H.4] rozważane są jednowymiarowe zagadnienia brzegowe

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s),$$

gdzie $g(s)$ jest niemalejąca i spełnia warunek $\int_0^1 dg = 1$. W ten sposób rozważane zagadnienie jest rezonansowe. Analiza oparta jest na wykorzystaniu koncepcji pary nad- i podprędkości (σ, τ) , funkcji spełniających następujące nierówności

$$\sigma(t) \leq \tau(t)$$

$$\sigma'(t) \geq f(t, x, \sigma), \quad \sigma(1) \leq \int_0^1 \sigma(s)dg(s)$$

$$\tau'(t) \leq f(t, x, \tau), \quad \tau(1) \geq \int_0^1 \tau(s)dg(s)$$

w pasie $\int_0^t \sigma(s)ds \leq x \leq \int_0^t \tau(s)ds$, dla $t \in [0, 1]$. Zasadniczym wynikiem w pracy jest Twierdzenie 4.1 stanowiące, że istnienie pary nad- i podprędkości (σ, τ) implikuje istnienie rozwiązań $u(t)$ zagadnienia brzegowego spełniających nierówności $\sigma(t) \leq u'(t) \leq \tau(t)$, $t \in [0, 1]$. Według oświadczeń habilitantki, pomysłodawcą tego interesującego twierdzenia i autorem jego dowodu jest współautor pracy. Habilitantka jako uzupełnienie zbadała przypadek tzw. pary ścisłych nad- i podrozwiązań (σ, τ) , gdzie w pierwszych nierównościach definicji są znaki ostrych nierówności i udowodniła, że istnienie takiej pary nad- i podrozwiązań implikuje istnienie rozwiązań zagadnienia brzegowego spełniających nierówności ostre $\sigma(t) < u'(t) < \tau(t)$, $t \in (0, 1]$.

W pracy [H.5] badane jest istnienie rozwiązań k -wymiarowego rezonansowego zagadnienia brzegowego

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s),$$

Na odwzorowanie f nakłada się następujący warunek dotyczący jego zachowania się w nieskończoności

$$1. \quad h(t, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(t, \lambda \xi)$$

jednostajnie ze względu na t i $\xi \in R^k$, $|\xi| = 1$.

Na odwzorowanie $h(t, \xi)$ nakładane są dodatkowe warunki, zbyt złożone by przytaczać je w tym miejscu. Do analizy zagadnienia zastosowano metodę perturbacji warunku

brzegowego i rozważane są następujące zagadnienia pomocnicze

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s) + \alpha_n x(0),$$

$$\alpha_n \in (0, 1), \quad \alpha_n \rightarrow 0$$

Dalej dowodzi się, że dla każdego $n \in N$ takie zagadnienie ma co najmniej jedno rozwiązanie $u_n(t)$ i że z ciągu $\{u_n(t)\}$ takich rozwiązań można wybrać podciąg rozwiązań $u_{n_k}(t)$ zbieżny jednostajnie wraz z pochodnymi $u'_{n_k}(t), u''_{n_k}(t)$, gdy $n_k \rightarrow \infty$ do rozwiązania $u(t)$ zagadnienia niezaburzonego i odpowiednio do jego pochodnych.

W pracy [H.6] do badania istnienia rozwiązań układu n równań różniczkowych

$$x'' = f(t, x, x'),$$

z jednym z następujących warunków brzegowych

$$(1) \quad \begin{aligned} x'(0) = 0, \quad x(1) = 0, \\ x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \\ x'(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0, \end{aligned}$$

zaproponowano zastosowanie pewnego uogólnionego twierdzenia Mirandy. Na przykładzie zagadnienia brzegowego z warunkami (1) przedstawimy w skrócie pomysły matematyczne z pracy. Na wstępie określane są pomocnicze zagadnienia początkowe

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = c, \quad x'(0) = 0, \quad c \in I = \prod_{k=1}^n [-M_k, M_k],$$

których forma całkowa przyjmuje postać

$$x(t) = c + \int_0^t (t-s)f(s, x(s), x'(s))ds, \quad c \in I = \prod_{k=1}^n [-M_k, M_k],$$

Dalej definiowane są odwzorowania wielowartościowe

$$F : I \rightarrow R^n,$$

$$F(c) = \{z \in R^n : z = x_c(1), \text{ gdzie } x_c(t) \text{ jest rozwiązaniem zagadnienia pocz.}\}$$

$$\Phi : I \rightarrow C^1([0, 1], R^n),$$

$$\Phi(c) = \Omega(c) = \{x_c(t) : x_c(t) \text{ jest rozwiązaniem zagadnienia pocz.}\}$$

$$\subset C^1([0, 1], R^n)$$

i funkcja $\phi : C^1([0, 1], R^n) \rightarrow R^n, \phi(x) = x(1) \in R^n$.

Dla zastosowanej metody kluczowymi są następujące spostrzeżenia

1. $F = \phi \circ \Phi$,

2. $x(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia brzegowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $c \in I$ takie, że $0 \in F(c)$.

W oparciu o znane własności Φ i własności typu Aronszajna dla zbiorów rozwiązań $\Omega(c)$, $c \in I$ zauważono, że F jest rozkładalne, co pozwoliło sformułować i udowodnić pewną wersję twierdzenia Mirandy. W konsekwencji wykazano, że istnieje takie $c \in I$, że $0 \in F(c)$. Praca i uzyskane tu wyniki zasługują na wysoką ocenę.

W pracy [H.7] badany jest układ równań różniczkowych

$$u'' = f(t, u, u'),$$

z warunkiem brzegowym

$$(2) \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s),$$

Zagadnienie jest rezonansowe, bo równanie jednorodne $u'' = 0$ z warunkiem brzegowym (2) ma nietrywialne rozwiązania $x(t) = \text{const}$. Metoda postępowania jest taka sama jak w pracy [H.6], odpowiednie odwzorowania są teraz określone następująco

$$F : I \rightarrow R^n,$$

$$F(c) = \{z \in R^n : z = x'_c(1) - \int_0^1 x'_c(s) dg(s), \text{ gdzie } x_c(t)$$

jest rozwiązaniem zagadnienia pocz.}

$$\Phi : I \rightarrow C^1([0, 1], R^n),$$

$$\Phi(c) = \Omega(c) = \{x_c(t) : x_c(t) \text{ jest rozwiązaniem pomocniczego zagadnienia pocz.}\} \subset C^1([0, 1], R^n)$$

i funkcja $\phi(x) = x'(1) - \int_0^1 x'(s) dg(s)$.

Uzasadnienie teraz, że F jest odwzorowaniem rozkładalnym wymagało pokonania pewnych stosunkowo nieskomplikowanych trudności technicznych.

Pozostałe prace w dorobku naukowym habilitantki

W zdecydowanej większości swoich prac, nie wchodzących w skład **osiągnięcia naukowego** habilitantka zajmuje się podobną tematyką, zagadnieniami brzegowymi dla równań różniczkowych drugiego rzędu. Jedynie tematyka prac [P.1], [P.8], [P.21] oraz [P.22], w których jest ona jednym ze współautorów, nie należy do głównego nurtu jej naukowych zainteresowań. Praca [P.1] jest z zakresu statystyki matematycznej, praca [P.8] dotyczy zagadnień dla równania Kortewega-de Vriesa i Burgersa-Kortewega-de Vriesa, tematem pracy [P.21] są zagadnienia dotyczące uogólnionych przestrzeni Lebesgue'a i Sobolewa na ograniczonych skalach czasowych, a temat pracy [P.22] dotyczył opisu rozwiązań typu canard dla modeli typu drapieznik-ofiara.

Przejdę teraz do krótkiego przeglądu zagadnień, którymi zajmowała się habilitantka w swoich pozostałych pracach.

W pracach [P.2-P.5] rozważane były asymptotyczne zagadnienia brzegowe

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0$$

oraz

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0$$

W badaniach zastosowano między innymi metody oparte na twierdzeniu Mirandy w wersji klasycznej oraz pewne jego uogólnienia na przypadek odwzorowań wielowartościowych. Wykorzystano także własności odpowiednich odwzorowań wielowartościowych rozkładalnych.

W pracach [P.6], [P.9], [P.10] badano nierezonansowe zagadnienia brzegowe z różnymi nielokalnymi warunkami brzegowymi dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego. Przykładami rozważanych tam warunków brzegowych są następujące warunki

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s)$$
$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s),$$

Dla uzyskania tu istnienia rozwiązań wykorzystano metody oparte na własnościach stopnia topologicznego Leraya-Schaudera.

W pracy [P.7] autorzy zajmowali się istnieniem T -okresowych rozwiązań dla następującego układu n równań różniczkowych

$$(\phi(u'))' + f(t, u, u') = 0,$$

gdzie $f : R_+ \times R \times R \rightarrow R$ jest funkcja ciągłą i T -okresową ze względu na t . Wykorzystano tutaj pewne uogólnienie twierdzenia kontynuacyjnego Mawhina dla tego typu zagadnień okresowych.

W pracy [P.11] zajmowano się istnieniem rozwiązań następującego asymptotycznego zagadnienia brzegowego

$$(\phi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(\infty) = 0,$$

W pracy [P.12], używając argumentów związanych ze stopniem topologicznym udowodniono twierdzenia o istnieniu rozwiązań dla nielokalnych rezonansowych zagadnień brzegowych

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s)$$

Ta praca stanowi rozszerzenie rozważań z pracy [H.5] na szerszą klasę funkcji f . Jednakże w obu pracach przyjmuje się mocne założenie, że f jest ograniczona.

Publikacje [P.13] oraz [P.14] dotyczą dwóch zagadnień brzegowych z nielokalnymi warunkami brzegowymi, mianowicie

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s)$$

oraz

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u(s) dg(s),$$

Prace są kontynuacją rozważań z [H.5]. Przyjmuje się tu nieco słabsze ograniczenia na funkcję f , a wyniki zostały otrzymane za pomocą metody perturbacji zastosowanej do zagadnienia z zaburzonymi warunkami brzegowymi.

W pracach [P.15], [P.16] badane są następujące zagadnienia brzegowe dla równania pierwszego rzędu

$$u' = f(t, u), \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s)$$

oraz

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = \int_0^1 u(s) dg(s)$$

W [P.15], potrzebne oszacowania a priori rozwiązania wynikają z istnienia takiego otwartego, ograniczonego i wypukłego zbioru $C \subset R^n$, że dla każdego $t \in [0, 1]$ i $u \in \bar{C}$, pole wektorowe $f(t, \cdot)$ spełnia odpowiednie geometryczne warunki na ∂C (pewne warunki znakowe). Rozważane zagadnienia i otrzymane wyniki są pewnymi uogólnieniami wyników Krasnosielskiego [45] i Gustafsona-Schmitta [30] dla zagadnień postaci $u' = f(t, u)$ z okresowymi warunkami brzegowymi $u(0) = u(1)$. W pracy [P.16] podano kontrprzykłady pokazujące, że jeżeli warunki gwarantujące istnienie rozwiązania nie są spełnione, to zagadnienie może nie mieć rozwiązań okresowych.

W pracach [P.17] oraz [P.18] badano istnienie rozwiązań następujących zagadnień brzegowych

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u(s) dg(s)$$

oraz

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s).$$

Dla udowodnienia istnienia rozwiązań zastosowano uogólnione twierdzenie Mirandy.

W pracy [P.19] rozważany jest następujący układ n -zależnych zagadnień brzegowych typu Neumanna

$$(\phi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

a w pracy [P.20] następujące zagadnienie nielocalne

$$(\phi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s).$$

Głównym celem publikacji [P.19] i [P.20] było uzyskanie warunków gwarantujących istnienie rozwiązań, wykorzystując pewne uogólnienie twierdzenia kontynuacyjnego Mawhina dla operatorów quasi-liniowych z pracy Ge i Ren [23].

Rozważane przez habilitantkę zagadnienia są interesujące, wymagają stosowania zaawansowanych metod topologicznych badania punktów stałych odwzorowań. Szczególnie ciekawe są zagadnienia z nielokalnymi warunkami brzegowymi. Tematyka będąca w kręgu zainteresowań habilitantki jest ciągle atrakcyjna, a wyniki uzyskane przez habilitantkę stanowią znaczący wkład w jej rozwój.

Załączone do dokumentacji informacje o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki wskazują, że w tych obszarach działalności habilitantka jest bardzo aktywna i ma znaczące osiągnięcia.

Konkluzja. Z przeglądu dorobku habilitantki wynika, że jest ona dojrzałym i samodzielny matematykiem, a zakres jej naukowych zainteresowań jest szeroki. W mojej opinii, określone ustawowo **osiągnięcie naukowe** i pozostały dorobek naukowy dr K. Szymańskiej-Dębowskiej spełniają w stopniu wystarczającym warunki stawiane *Ustawą o tytule naukowym i stopniach naukowych*. Będę zatem zdecydowanie popierać wniosek o nadanie dr Katarzynie Szymańskiej-Dębowskiej stopnia naukowego doktora habilitowanego.


Wojciech Mydlarczyk

