

Recenzja rozprawy habilitacyjnej przedstawionej przez dr Katarzynę  
Szymańską-Dębowską pt. "Nielokalne zagadnienia brzegowe dla równań  
różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego".

Katarzyna Szymańska-Dębowska ukończyła studia matematyczne w 1998 roku na Uniwersytecie Łódzkim. Doktorat obroniła w 2006 roku na Politechnice w Łodzi. Całą karierę związana jest uczelniami łódzkimi.

W ramach aplikacji habilitacyjnej przedstawiła osiągnięcie naukowe składające się z 7 prac. Dodatkowe 21 prac zaliczone są do dorobku. Zanim omówię szczegółowo zawartość osiągnięcia, kilka uwag na temat pozostałych prac z dorobku. Znajdziemy tam pracę ze statystyki, dwie prace na temat p-laplasjanu, ostatnią pracę (ukazała się właśnie w J. Math. Anal. Appl.) dotyczącą przejść granicznych w układach równań zwyczajnych i zmieniającej się, przy przejściach, asymptotyki rozwiązań. W pracy tej autorzy kontrolują pewne oscylujące zachowania rozwiązań. Autorka używa tu innych metod niż w poprzednich artykułach, w szczególności znajdziemy nietrywialne oszacowania całek oscylujących.

Pozostałe prace w dorobku są bardzo podobne do treści osiągnięcia, mianowicie, używając metod topologicznych, autorka rozważa istnienie rozwiązań dla różnych zagadnień z zakresu równań zwyczajnych drugiego rzędu. Prace te opublikowane są w pismach dość słabych, często egzotycznych. Wyjątek stanowi praca z 2016 roku, opublikowana w Annali Mat. Pura Apl.

Zgodnie z bazą MathSciNet, autorka cytowana jest 36 razy przez 32 autorów. Nie jest to wynik wyjątkowy, świadczy jednak o oddźwięku pewnych wyników w środowisku.

**Omówienie wyników osiągnięcia habilitacyjnego.** Wyniki przedstawione w siedmiu pracach wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego dotyczą rozwiązywalności nielokalnego zagadnienia brzegowego dla równań zwyczajnych drugiego rzędu. Mianowicie, w serii siedmiu prac, czterech samodzielnych, dwóch jako jedna z dwóch autorów, jednej napisanej we troje, autorka rozważa zagadnienie

$$x'' = f(t, x, x') \text{ na odcinku } (0, 1) \quad (0.1)$$

z nielokalnymi warunkami brzegowymi, nie troszcząc się o pełną ogólność, postaci

$$x(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s) dg(s), \quad (0.2)$$

ewentualnie

$$x'(0) = 0 \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s) dg(s). \quad (0.3)$$

Rozważa się układy równań, czyli  $x \in R^n$ , o funkcjach  $f$  i  $g$  czyni się pewne założenia, w drugim z warunków brzegowych czasem rozważa się  $x(1)$  jako nielokalną funkcję rozwiązania. Pewne bardziej ogólne warunki są także brane pod uwagę. Choć warunki (0.2) i (0.3) mogą sprawiać wrażenie dość sztucznych, są one np. uogólnieniem warunków typu  $x'(1) = x(1/2) + x(1/3)$ , takie pojawiają się w literaturze. W jednej z prac, dr Szymańska przywołuje np. zagadnienie termistora jako przykład, w którym pojawiają się podobne warunki brzegowe.

Prace [H1]-[H7] składają się z wyników o istnieniu rozwiązań zagadnienia (0.1). Zazwyczaj jest to po prostu istnienie pewnego rozwiązania, choć w pracy [H4], w moim przekonaniu, zdecydowanie

najlepszej spośród przedstawionych, autorzy pokazują, że dla pewnych funkcji  $f$  w (0.1), istnieje wiele rozwiązań. Jedną z prac (samodzielna, [H6]) opublikowana jest w bardzo dobrym piśmie, J. Differential Equations, praca [H2] ukazała się w dobrym Proc. Amer. Math. Soc., pozostałe opublikowane zostały w dość egzotycznych pismach. Niemniej, zaznaczę, że według mnie, zdecydowanie najlepsza jest praca [H4].

Pozwolę sobie teraz bardziej szczegółowo omówić wyniki z prac [H1]-[H7]. Po pierwsze, zagadnienie (0.1) ma naturalne sformułowanie w postaci operatorowej. W sytuacji, gdy pojawiający się operator ma zerowe jądro, zagadnienie jest nierezonansowe, w przeciwnym przypadku mówimy o zagadnieniu rezonansowym. Rezonansowe zagadnienia typu (0.1) to dość standardowe problemy, dysponujemy już metodami, które pozwalają łatwo je rozwiązać. Praca [H1] dotyczy takich zagadnień. Jest to najślabsza z prac przedstawionych przez Szymańską, rozumiem że dołączona dla kompletności rozważań. Właściwie, za darmo dostajemy tam rozwiązywalność przy dość ogólnych założeniach. Wspomnę od razu o pracy [H6], w której autorka wprowadza pewne uogólnienie twierdzenia Poincaré-Mirandy. Praca różni się od pozostałych, gdyż główny nacisk położony jest tam na twierdzenie topologiczne. Rozważane zastosowania do problemów brzegowych są tu trochę alibi. Niemniej, udowodnione twierdzenie wykorzystano do rozwiązania rezonansowego problemu (0.1), (0.2) np. w pracy [H3]. Okazuje się, że użycie metody uogólnionego twierdzenia Mirandy prowadzi w takim przypadku do wyniku trochę silniejszego niż wynik z [H2]. Otóż w pracy [H2] autorzy rozwiązują zagadnienie rezonansowe (0.1), (0.2) używając teorii stopnia (indeksu) Leraya-Schaudera. Główna trudność w tej pracy to odpowiednie sformułowanie operatorowe zagadnienia, tak aby była możliwość użycia indeksu, mimo że mamy do czynienia z problemem rezonansowym. Na str. 2025 przedstawiono odpowiednie sformułowanie problemu. Pozwala ono udowodnić istnienie co najmniej jednego rozwiązania przy użyciu metod stopnia topologicznego. Wymaga to (przy tym podejściu) założenia [H2, (2.3)], czyli

$$\int_0^1 e^s dg(s) \neq e. \quad (0.4)$$

Podejście z [H3], wykorzystujące twierdzenie z [H6] zamiast metod indeksu, pozwala pozbyć się powyższego założenia w twierdzeniu o istnieniu. Inna rzecz, że w pracy [H3] autorzy koncentrują się na bardziej ogólnym, nieliniowym warunku brzegowym. Wreszcie [H5] dotyczy zagadnienia rezonansowego (0.1), (0.3), otrzymano wynik o istnieniu co najmniej jednego rozwiązania. Dowód jest jednak trochę trudniejszy. Użyto ciągu problemów aproksymujących (0.1), (0.3). Każdy z takich problemów rozwiązuje się za pomocą teorii stopnia. Następnie autorka upewnia się, że ciąg rozwiązań jest zwarty w odpowiedniej topologii, a w jego granicy otrzymujemy rozwiązanie (0.1), (0.3). Praca [H7] dotyczy tego samego zagadnienia, otrzymano ten sam wynik, modyfikując metodę dowodu. Mianowicie, w [H7] użyto twierdzenia Poincaré-Mirandy z [H6].

Pora omówić teraz najciekawszą, moim zdaniem, pracę [H4]. Dotyczy ona zagadnienia (0.1), (0.2). Autorzy idą tu jednak znacznie dalej niż w pracy [H2]. Nie tylko pokazują istnienie rozwiązania, dostają również oszacowanie na jego pierwszą pochodną. W tym celu używają koncepcji par pod- i nadprędkości. Ta metoda wymaga bardziej zaawansowanego użycia teorii stopnia, jest to ładny element pracy [H4]. Koncepcja par pod- i nadprędkości nie tylko prowadzi do ilościowych oszacowań pierwszych pochodnych rozwiązania, ma jeszcze jedną zaletę. Otóż w [H4, Tw. 7.1] autorzy wykorzystują pary nad- i podprędkości do udowodnienia twierdzenia o warunku wystarczającym istnienia przynajmniej trzech rozwiązań zagadnienia (0.1), (0.2). Twierdzenie to ma dość długi i mozolny dowód. Znow, użyto w nim stopnia Leraya-Schaudera w elegancki i nietrywialny sposób. Używając [H4, Tw. 7.1] autorzy pokazują, że dla  $f(x)$  postaci  $a(t, x)(x' + 5/2)(x' + 1/2)(x' - 3/2)$ ,

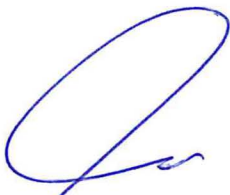


gdzie  $a$  jest dość dowolną funkcją, (0.1), (0.2) posiada co najmniej trzy rozwiązania. Więcej, kolejny przykład wskazuje takie  $f$ , dla których istnieje nieskończenie wiele rozwiązań. Tym razem  $f$  jest postaci  $-2a(t, x) \sin[\frac{1}{2}\pi(x' - \frac{1}{2})]$ . Zatem, w [H4] autorzy zliczają ilość rozwiązań zagadnienia (0.1), (0.2).

**Konkluzja.** W moim przekonaniu nie jest łatwo podjąć decyzję czy przedstawiony przez dr Szymańską materiał jest wystarczający do nadania jej habilitacji z matematyki. Przedstawiony materiał powinien upewniać mnie, że Pani Szymańska jest już dojrzałą matematyczką, której prace odcisnęły swoje piętno na uprawianej przez nią dziedzinie. Argumenty, które świadczą na jej korzyść to użyte w nietrywialny kreatywny sposób zaawansowane i bardzo istotne metody indeksu Leraya-Schaudera oraz inne topologiczne metody punktu stałego. Dodatkowo, bardzo dobra praca [H4], w której poza istnieniem rozwiązań, autorzy śledzą ich ilość, a także dostają dodatkowe ilościowe oszacowania rozwiązań. Metody par nad- i podrozwiązań tam użyte są pochodną zasad maksimum (porównawczych). Użyto ich w bardzo elegancki, nietrywialny sposób.

Jeśli chodzi o kontrargumenty, to dotyczą one głównie tego, czego w rozprawie nie ma. Otóż, aż prosiłoby się o przedstawienie pracy analogicznej do [H4] związanej z warunkiem brzegowym (0.3). Byłby to znacznie bardziej interesujący wkład do rozprawy niż [H7], która w pewnym sensie dubluje [H5] czy mało ciekawa, rozważająca dość wydumany warunek brzegowy [H3]. Ponadto, szkoda że nie ma choć jednej pracy związanej z zagadnieniem eliptycznych równań cząstkowych. Jest tam wiele miejsca na zastosowanie metod stopnia topologicznego. Dodatkowo, tego typu zagadnienia wymagają znacznie bogatszego warsztatu, można się bardziej popisać. Wreszcie, znacznie prościej o uzasadnienie dla ostatnich rozważań. Jest wiele zagadnień w fizyce, inżynierii czy biologii, które sprowadzają się do eliptycznych problemów drugiego rzędu. I tu pojawia się mój największy zarzut, tak w pracach autorki, jak w referacie brakuje konkretnych zagadnień (z zakresu choćby mechaniki, fizyki, ekonomii czy geometrii), które sprowadziłyby się do własności rozwiązań rozważanych zagadnień. Osiągnięcie sprawia wrażenie jakby brano pod uwagę na tyle ogólne równania po to, aby dobrać założenia na parametry tak, aby uzyskać wynik mówiący o istnieniu rozwiązań. Na szczęście jest praca [H4], w której pokazane jest zjawisko istnienia wielu rozwiązań (nawet nieskończenie) w pewnych przypadkach. Wynik jest na tyle zaskakujący, że interesujący.

W związku z dość wąskim spektrum zainteresowań Szymańskiej i niewielką liczbą potencjalnych zastosowań, cytowania są dość średnie (36 razy w bazie MathSciNet), z drugiej strony, jak na tak ograniczone pole badań wynik świadczy o tym, że w swojej dziedzinie autorka znajduje odbiór. Świadczy o tym również fakt współpracy z bardzo dobrym specjalistą od teorii stopnia i jej zastosowań w zagadnieniach brzegowych, Jean Mawhin'em. Dodatkowo, na korzyść świadczy też rozwój autorki w ostatnich latach, szczególnie praca opublikowana niedawno wspólnie z Banasiakiem i Seneu Tchamga w *J. Math. Anal. Appl.*, poruszono tam ciekawe zagadnienie będące daleko od dotychczasowych zainteresowań Szymańskiej. Praca [H4] oraz zaobserwowany rozwój autorki w ostatnich latach pomagają mi odnieść się pozytywnie do wniosku o nadanie habilitacji. Chciałem poprzeć dopuszczenie dr Szymańskiej-Dębowskiej do kolejnych etapów procesu habilitacyjnego. Mam wrażenie że przy odrobinie dobrej woli mogę uznać, iż ustawowe wymagania są przez jej rozprawę spełnione. Sugeruję jednak w przyszłości podejmowanie nowych zagadnień i poszerzanie zainteresowań.



Warszawa, 31.12.2018  
dr hab. Tomasz Cieślak, prof ndzw. IMPAN