

**Andrzej Okolewski**

Instytut Matematyki  
Politechnika Łódzka  
ul. Wólczańska 215  
90-924 Łódź

## **AUTOREFERAT**

OPTYMALNE OSZACOWANIA FUNKCJONAŁÓW STATYSTYK PORZĄDKOWYCH  
DLA ZALEŻNYCH OBSERWACJI

### SPIS TREŚCI

Informacje o autorze	2
Wskazanie osiągnięcia naukowego	3
1. Wprowadzenie	3
2. Znana struktura zależności	7
3. Całkowicie nieznana struktura zależności	9
4. Próby o losowej liczności o pewnych znanych momentach	11
5. Próby maksymalnie stabilne	12
6. Nieparametryczne otoczenia niezależności	15
7. Znane wielowymiarowe rozkłady brzegowe	18
8. Przekątniowa zależność	23
Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych	29
Literatura	33

## Informacje o autorze

1. Imię i nazwisko: Andrzej Okolewski
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:
  - doktor nauk matematycznych  
rozprawa: Oszacowania funkcjonałów statystyk pozycyjnych i rekordowych  
promotor: prof. dr hab. Lesław Gajek  
recenzenci: prof. dr hab. Jarosław Bartoszewicz i prof. dr hab. Dominik Szynal  
Politechnika Łódzka, 2000
  - magister matematyki  
Politechnika Łódzka, 1992
  - studia magisterskie z matematyki  
Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej  
Politechnika Łódzka, 1987–1992.
3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:
  - Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka,  
asystent od 1 października 1992 do 30 września 2000,  
adiunkt od 1 października 2000.

## Wskazanie osiągnięcia naukowego

Moje główne osiągnięcie naukowe (w rozumieniu art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki) to jednotematyczny cykl dziewięciu publikacji pod tytułem

### OPTYMALNE OSZACOWANIA FUNKCJONAŁÓW STATYSTYK PORZĄDKOWYCH DLA ZALEŻNYCH OBSERWACJI

W skład cyklu wchodzi następujące publikacje:

- [A1] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *Bounds for  $L$ -statistics from weakly dependent samples of random length*, Comm. Statist. Theory Methods 34 (2005), 1899–1910.
- [A2] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *Bounds for moments of the maximum of concomitants of selected order statistics with application*, Comm. Statist. Theory Methods 39 (2010), 2753–2766.
- [A3] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *An extension of the Erdős-Neveu-Rényi theorem with applications to order statistics*, Statist. Probab. Lett. 55 (2001), 181–186.
- [A4] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, K. SZYMANSKA, *Sharp bounds for  $L$ -statistics from dependent samples of random length*, J. Stat. Plann. Inference 127 (2005), 71–89.
- [A5] A. OKOLEWSKI, *Bounds on expectations of  $L$ -estimates for maximally and minimally stable samples*, Statistics 50 (2016), 903–916.
- [A6] A. OKOLEWSKI, M. KALUSZKA, *Stability of expected  $L$ -statistics against weak dependence of observations*, Statist. Probab. Lett. 106 (2015), 157–164.
- [A7] A. OKOLEWSKI, *Distribution bounds for order statistics when each  $k$ -tuple has the same piecewise uniform copula*, Statistics 51 (2017), 969–987.
- [A8] A. OKOLEWSKI, *An extension of Kemperman's characterization on  $k$ -independence and its application*, J. Math. Anal. Appl. (2018), <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.06.026>.
- [A9] A. OKOLEWSKI, *Extremal properties of order statistic distributions for dependent samples with partially known multidimensional marginals*, J. Multivar. Anal. 160 (2017), 1–9.

## 1. Wprowadzenie

Niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Statystyki porządkowe  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$  powstają w wyniku ustawienia wartości obserwacji w próbie losowej  $(X_1, \dots, X_n)$  w porządku niemalejącym. W szczególności,  $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  i  $X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . Liczne zastosowania statystyk porządkowych we wnioskowaniu statystycznym i w teorii niezawodności opisane są np. w monografiach [3], [8] oraz [19].

Chronologiczny spis i omówienie wyników najważniejszych, wydanych przed rokiem 1950, publikacji dotyczących statystyk porządkowych z niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zawiera opracowanie Hartera [41]. Jeden z pierwszych rezultatów uzyskał Bernoulli [10], który – w kontekście ubezpieczeń na życie – obliczył wartość oczekiwaną maksimum obserwacji z rozkładu jednostajnego na przedziale jednostkowym. Badając własności asymptotyczne mediany z próby, Laplace [52] wyznaczył rozkłady pojedynczych statystyk porządkowych. Ogólne wzory na wartości oczekiwane spacji  $X_{j+1:n} - X_{j:n}$  oraz statystyk  $X_{j:n}$  podali Pearson [73] i Daniell [18]. Prekursorami w badaniach rozkładów granicznych wartości ekstremalnych ciągów zmiennych losowych byli Fréchet [27], Fisher i Tippett [26], a także Gumbel [39] oraz von Mises [57]. Badaniem problemów asymptotycznych mieszczących się w ramach teorii statystyk porządkowych (zob. np. [77]), zajmowali się również Kołmogorow, Erdős i Rényi.

Wszystkie powyżej wymienione rezultaty zostały uzyskane przy założeniu, że rozkład próby jest w pełni znany. W przypadku, gdy łączny rozkład obserwacji jest jedynie częściowo znany, ważną rolę odgrywa znajomość możliwie najlepszych oszacowań dla wybranych charakterystyk statystyk porządkowych. W dalszej części tego rozdziału dokonam przeglądu najważniejszych wyników dotyczących optymalnych oszacowań dla dystrybuant i wartości oczekiwanych statystyk porządkowych, sformułuję cel rozprawy oraz krótko opiszę uzyskane rezultaty – bardziej szczegółowe ich omówienie przedstawię w kolejnych rozdziałach.

**1.1. Klasyczne oszacowania dla statystyk porządkowych.** Pierwsze uniwersalne ograniczenia dla statystyk porządkowych zostały podane niezależnie przez Gumbela [40], Hartleya i Davida [42] oraz Morigutiego [58]. Autorzy dwóch pierwszych prac rozważyli próbę niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze znaną wartością oczekiwaną  $\mu$  oraz wariancją  $\sigma^2$  i wyznaczyli optymalne oszacowania na wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $(X_{n:n} - \mu)/\sigma$ . Moriguti [58], wprowadzając metodę największych wypukłych minorant, rozszerzył rezultat Gumbela, Hartleya i Davida na pozostałe statystyki porządkowe oraz podał jego odpowiednik dla spacji  $X_{j+1:n} - X_{j:n}$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$ . Metoda Morigutiego umożliwia wyznaczenie optymalnych oszacowań tego typu dla dowolnych kombinacji liniowych statystyk porządkowych, czyli dla dowolnych  $L$ -statystyk. Wspomniane wyniki oraz ich odpowiedniki dla pewnych nieparametrycznych rodzin rozkładów, dotyczące klasycznego modelu niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zostały zebrane i szczegółowo opisane w monografii Rychlika [88] (zob. również [12, 13, 14]).

Przedmiotem zainteresowania matematyków były także, motywowane różnorodnymi probabilistycznymi i statystycznymi zastosowaniami, optymalne oszacowania dla wybranych funkcjonałów statystyk porządkowych z dowolnie zależnych zmiennych losowych o niekoniecznie identycznych rozkładach. Badania własności ekstremalnych rozkładów statystyk porządkowych z prób dowolnie zależnych obserwacji zostały zainicjowane przez Mallowsa [55] oraz Lai'a i Robbinsa [51] – wyznaczyli oni stochastycznie ekstremalne rozkłady maksymalnej statystyki porządkowej dla, odpowiednio, obserwacji z rozkładu jednostajnego na przedziale jednostkowym oraz obserwacji o dowolnych – niekoniecznie identycznych – rozkładach. W przypadku zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, Rychlik [82] oraz Caraux i Gascuel [16] rozszerzyli rezultat Lai'a i Robbinsa na pozostałe statystyki porządkowe (por. [86]). Jednostajnie osiągalne ograniczenia dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych z dowolnie zależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie podał Rychlik [83]. Wymienione rezultaty prowadzą do optymalnych oszacowań dla wartości oczekiwanych statystyk porządkowych i  $L$ -statystyk (zob. [87] i [88]).

Osiągalne ograniczenia dla wartości oczekiwanych liniowych funkcji statystyk porządkowych z próby niekoniecznie identycznie rozłożonych, dowolnie zależnych zmiennych losowych o pewnych znanych momentach, uzyskano stosując inne podejście. Polega ono na wykorzystaniu zależności pomiędzy statystykami porządkowymi z próby deterministycznej  $x_1, \dots, x_n$ , a momentami z tej próby. Oszacowania dla statystyk porządkowych  $x_{j:n}$  oraz ich liniowych kombinacji wyrażone za pomocą średniej i wariancji z próby stanowiły przedmiot systematycznych badań dotyczących identyfikacji obserwacji odstających (zob. np. [2], [67], [87]). Osiągalne ograniczenia dla wartości oczekiwanych dowolnych  $L$ -statystyk z dowolnie zależnych obserwacji o znanych wartościach oczekiwanych i wariancjach wyznaczyli Arnold i Groeneveld [4] (por. [63], [2]). Przy dodatkowym założeniu, że znane są

również kowariancje obserwacji, Aven [5] zaproponował lepsze ograniczenie dla wartości oczekiwanej maksymalnej statystyki porządkowej. Lefèvre [53] rozszerzył rezultat Avena na kombinacje liniowe statystyk porządkowych, lecz okazało się, że jego oszacowania mogą być gorsze od oszacowań Arnolda i Groenevelda. Ograniczenia lepsze zarówno od ograniczeń Arnolda i Groenevelda, jak i od ograniczeń Lefèvre'a podał Papadatos [70] (por. [11, 72]).

Prac poświęconych optymalnym oszacowaniom dla dystrybuant statystyk porządkowych z prób zależnych zmiennych losowych o częściowo znanej strukturze zależności jest niewiele. Pierwszy wynik tego typu uzyskał Kemperman [47]. Rozważył on przypadek próby  $k$ -tkami niezależnych obserwacji o tym samym znanym rozkładzie, sprowadził problem wyznaczania punktowo osiągalnych ograniczeń dla dystrybuant statystyk porządkowych do prostszego problemu, określonego przez Autora mianem problemu momentów, a następnie rozwiązał problem momentów odpowiadający górnym ograniczeniom dla pojedynczych statystyk porządkowych (por. [56]). Drugi wynik otrzymał Papadatos [71], który wprowadził pojęcie prób maksymalnie i minimalnie stabilnych ustalonego rzędu i podał dla takich prób optymalne jednostronne oszacowania dla dystrybuant i wartości oczekiwanych pojedynczych statystyk porządkowych.

**1.2. Cel naukowy.** Głównym celem rozprawy jest wyznaczenie nowych osiągalnych ograniczeń dla wybranych funkcjonałów statystyk porządkowych z prób zależnych zmiennych losowych. Rozważania prowadzone będą w ramach trzech klas modeli, wyróżnionych ze względu na zakres dostępnej informacji o strukturze zależności obserwacji. Będziemy zakładać, że struktura ta jest albo w pełni znana, albo całkowicie nieznaną, albo częściowo znana<sup>1</sup>.

W przypadku modeli niepełnej wiedzy o strukturze zależności obserwacji, realizacja wytyczonego celu wymagała zaproponowania odpowiedniego podejścia oraz wypracowania stosownych narzędzi. Kluczową rolę odgrywają tu dwa typy charakteryzacji. Charakteryzacje pierwszego typu polegają na określeniu wszystkich możliwych rozkładów wektora losowego opisującego liczby sukcesów  $q$  rodzajów w  $n$  zależnych doświadczeniach losowych. Charakteryzacje drugiego typu sprowadzają się do podania warunków koniecznych i wystarczających na to, aby proces stochastyczny miał identyczne rozkłady jednowymiarowe jak dystrybuanta empiryczna z pewnej  $n$ -elementowej próby w określony sposób zależnych zmiennych losowych o tym samym znanym rozkładzie. Część uzyskanych wyników to istotne uogólnienia klasycznych rezultatów opisanych w poprzednim podpunkcie, pozostałe wyniki są nowe.

**1.3. Syntetyczny opis uzyskanych wyników.** W pracach [A1] i [A2], omówionych w rozdziale 2, podano odpowiedniki klasycznych wyników typu Hartleya–Davida–Gumbela dla prób zależnych zmiennych losowych o znanej strukturze zależności. W artykule [A1] wyznaczono osiągalne ograniczenia dla wartości oczekiwanej  $L$ -statystyk z prób losowej liczności zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o pewnych znanych momentach, gdy zależność pomiędzy obserwacjami jest modelowana za pomocą znanych kopuł. Do momentu ukazania się publikacji [A1], w literaturze nie były znane rezultaty tego typu dla prób zależnych obserwacji o znanej strukturze zależności. W pracy [A2] podano osiągalne ograniczenia dla wartości oczekiwanej maksimum konkomitant odpowiadających wybranym kolejnym statystykom porządkowym, gdy zależności poprzedników i następników deterministycznej liczby niezależnych par losowych określono za pomocą znanych –

<sup>1</sup> W ostatnich latach takie modele są wykorzystywane m.in. w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej (zob. np. [24, 75, 81, 95]).

niekoniecznie identycznych – kopuł, poprzedniki par mają identyczny rozkład o nieznaney ciągłej dystrybuancie, natomiast następniki par mają ten sam rozkład o znanej wartości oczekiwanej i wariancji. Dopuszczono tym samym możliwość zmiany struktury zależności w czasie – wcześniej badane były własności maksimów konkomitant dla par identycznie rozłożonych. Za pomocą uzyskanych w [A2] oszacowań, porównano zaproponowaną w pracy nową metodę wyceny ryzyk ubezpieczeniowych, alternatywną dla składki zaufania, ze składkami wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego.

Artykuł [A3], omówiony w rozdziale 3, dotyczy sytuacji, gdy struktura zależności próby jest całkowicie nieznaną. W pracy uogólniono wynik Erdősa–Neveu–Rényi’ego [25], mówiący o rozkładzie liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego, gdy próby są zależne. Rezultat ten zastosowano do podania alternatywnego dowodu optymalnych nierówności Rychlika [83] dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych z obserwacji o tym samym rozkładzie. Proponowane podejście umożliwia wyznaczenie odpowiedników ograniczeń Rychlika dla zmiennych losowych o różnych rozkładach, jak i uzyskanie nowych optymalnych oszacowań dla innych funkcjonałów statystyk porządkowych.

Wyniki prac [A4]-[A9], przedstawione w kolejnych rozdziałach, dotyczą różnych modeli częściowej, niepełnej informacji o strukturze zależności próby. W [A4] rozszerzono nierówności Arnolda–Groenevelde–Papadatosa [4, 70] dla wartości oczekiwanej dowolnych  $L$ -statystyk z prób zależnych, niekoniecznie identycznie rozłożonych zmiennych losowych o pewnych znanych momentach – na przykład prób o losowej liczności, gdy liczba obserwacji jest dowolną zmienną losową o wartościach w zbiorze dodatnich liczb całkowitych. Ciągi zmiennych losowych o losowej długości pojawiają się w wielu modelach probabilistycznych, np. w estymacji sekwencyjnej lub w matematyce ubezpieczeniowej. Istniejące nierówności nie obejmowały tego przypadku.

W pracy [A5] zaprezentowano dalsze – w odniesieniu do przedstawionego w [A3] – uogólnienie wyniku Erdősa–Neveu–Rényi’ego i, korzystając z niego, rozszerzono nierówności Papadatosa [71] dla dystrybuant pojedynczych statystyk porządkowych z maksymalnie oraz minimalnie stabilnych obserwacji do obustronnych osiągalnych nierówności dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych. Następnie podano osiągalne górne i dolne ograniczenia dla wartości oczekiwanych  $L$ -statystyk z takich obserwacji oraz zbadano stabilność wartości oczekiwanej  $L$ -statystyki z próby o zadanej maksymalnie stabilnej strukturze zależności ze względu na maksymalnie stabilne odchylenia od tej struktury. Część uzyskanych wyników to uogólnienia odpowiadających im rezultatów z prac [71, 82, 83, 84, 85, 89, 90], pozostałe wyniki są nowe.

Artykuł [A6] jest poświęcony badaniu wpływu zależności na wartość oczekiwaną  $L$ -statystyki w przypadku, gdy nieznaną strukturą zależności obserwacji należy do pewnego nieparametrycznego otoczenia niezależności typu Kołmogorowa lub typu chi-kwadrat. Inspirację do rozważenia otoczeń tego typu stanowiły warunki  $\psi$  mieszania (ang.  *$\psi$ -mixing*, zob. np. [20]). W pracy podajemy osiągalne – w odróżnieniu od nieosiągalnych zaprezentowanych w [C13]<sup>2</sup> – ograniczenia dla różnicy wartości oczekiwanych  $L$ -statystyk z prób niezależnych i zależnych, niekoniecznie identycznie rozłożonych obserwacji, o takich samych odpowiadających sobie jednowymiarowych rozkładach brzegowych. Ograniczenia wyrażone są za pomocą charakterystyk liczbowych próby niezależnych zmiennych losowych oraz parametrów liczbowych opisujących wielkość otoczenia. To pierwsze w literaturze osiągalne tego typu nierówności dla wartości oczekiwanych dowolnych kombinacji liniowych statystyk porządkowych.

<sup>2</sup>Symbolem C (odpowiednio, B) w niniejszym opracowaniu są oznaczane prace nie wchodzące w skład osiągnięcia naukowego, opublikowane po uzyskaniu (odpowiednio, przed uzyskaniem) stopnia doktora.

W artykułach [A7] i [A8] rozszerzono podaną przez Kempermana [47] charakteryzację rodziny możliwych rozkładów wektora opisującego liczby sukcesów  $q$  rodzajów w  $n$  niezależnych  $k$ -tkami próbach, na przypadek prób zależnych obserwacji o znanych kawałkami jednostajnych  $k$ -wymiarowych kopułach brzegowych<sup>3</sup> lub znanych  $k$ -wymiarowych kopułach brzegowych typu mieszanego. Uzyskane wyniki wykorzystano do wyznaczenia punktowo osiągalnych górnych i dolnych ograniczeń dla dowolnych kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych z prób jednakowo rozłożonych, zależnych obserwacji o znanych  $k$ -wymiarowych kopułach brzegowych. W przypadku wybranych rodzin zależności podano jawne postaci ograniczeń dla dystrybuant pojedynczych statystyk porządkowych oraz różnic dystrybuant dwóch kolejnych statystyk porządkowych.

W pracy [A9] wprowadzono, mające naturalną interpretację w teorii niezawodności, pojęcie zależności przekątniowej oraz sformułowano warunki konieczne i wystarczające na to, aby proces stochastyczny miał takie same jednowymiarowe rozkłady brzegowe jak dystrybuanta empiryczna z pewnej  $n$ -elementowej próby przekątniowo zależnych zmiennych losowych o tym samym znanym rozkładzie. Korzystając z tej charakteryzacji, sprawdzono problem wyznaczania ograniczeń dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych z prób przekątniowo zależnych obserwacji do pewnego problemu momentów, rozwiązano ten problem metodą geometryczną oraz przedstawiono warunki konieczne i wystarczające jednostajnej osiągalności uzyskanych ograniczeń. W przypadku wybranej klasy rodzin zależności wyznaczono stochastycznie ekstremalne rozkłady pojedynczych statystyk porządkowych. Uzyskane wyniki stanowią istotne ogólnienie rezultatów Rychlika [82, 83] dotyczących prób dowolnie zależnych obserwacji.

Wyniki prac [A3] – [A9] mogą znaleźć zastosowanie w teorii niezawodności, np. do oceny przeciętnego czasu bezawaryjnej pracy układu  $(n - k + 1)$ -spośród- $n$  lub układu koherentnego w sytuacji, kiedy łączny rozkład czasów bezawaryjnej pracy elementów układu nie jest w pełni znany. Mogą być one użyteczne również w matematyce aktuarialnej, gdy struktura zależności ryzyk wchodzących w skład portfela jest częściowo znana lub całkowicie nieznaną, np. przy kalkulacji składki za reasekurację typu ECOMOR lub typu LC (zob. np. [50]), kalkulacji składki ubezpieczeniowej w jednorodnym modelu indywidualnego ryzyka za pomocą empirycznych spektralnych miar ryzyka (zob. np. [22, 38]) lub kalkulacji składki w ubezpieczeniach dla wielu osób (zob. [C18]).

## 2. Znana struktura zależności

W niniejszym rozdziale zaprezentujemy dwa podejścia prowadzące do uogólnień klasycznych wyników typu Hartleya–Davida–Gumbela na przypadek zależnych zmiennych losowych o znanej strukturze zależności. Pierwsze podejście zostało przedstawione w artykule [A1]. Umożliwia ono wyznaczenie osiągalnych ograniczeń dla wartości oczekiwanej  $L$ -statystyk z prób zależnych obserwacji, gdy zależność pomiędzy obserwacjami modelowana jest za pomocą znanych kopuł.

Niech  $X, X_1, X_2, \dots$  będą zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z nieznaną dystrybuantą  $F$  i znanym drugim momentem zwykłym  $\mu_2 = \mathbf{E}X^2 < \infty$ . Jeśli nieznaczono inaczej, zmienne losowe występujące w niniejszym opracowaniu będą określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Oznaczmy przez  $F^{-1}$  lewostronnie ciągłą funkcję kwantylową, tzn.  $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$  dla  $u \in (0, 1)$ . Załóżmy,

<sup>3</sup>Kopuły kawałkami jednostajne, określane w literaturze również mianem kopuł wieloliniowych lub szachownicowych (ang. *multilinear or checkerboard copulas*; zob. np. [23]), odgrywają kluczową rolę w procesie estymacji struktur zależności dyskretnych wektorów losowych (zob. [33, 34]).

że dla dowolnych  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  i  $n \geq 2$ ,

$$\mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = C_n(F(x_1), \dots, F(x_n)),$$

gdzie  $(C_n)_{n=2}^\infty$  jest zgodnym ciągiem kopuł. Niech  $N$  będzie zmienną losową o wartościach w  $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{Z}$ , określmy  $[a; b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ , gdy  $a \leq b$  oraz  $[a; b] = \emptyset$ , gdy  $a > b$ . Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste  $\lambda_{in}$ , gdzie  $i \in [1; n]$  oraz  $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ . Przyjmijmy konwencję  $\sum_{k=i}^j a_k = 0$ , gdy  $i > j$ .

Wykorzystując metodę Morigutiego, udowodniono następujące

**Twierdzenie 2.1** ([A1], Thm. 2.2). *Jeżeli  $N$  i  $(X_i)_{i=1}^\infty$  są niezależne oraz spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

**Z1.**  $N \leq c$  dla pewnego  $c < \infty$ ,

**Z2.**  $X \geq 0$  i  $\lambda_{in} \geq 0$  dla wszystkich  $1 \leq i \leq n < \infty$ ,

**Z3.**  $\mathbf{E}|X| < \infty$ ,  $\mathbf{E}N < \infty$  i  $\sup_{1 \leq i \leq n < \infty} |\lambda_{in}| < \infty$ ,

to

$$\mathbf{E} \sum_{k=1}^N \lambda_{kN} X_{k:N} \leq (\mu_2)^{1/2} \left( \int_0^1 [\underline{\varphi}(t)]^2 dt \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

gdzie  $\underline{\varphi}$  oznacza prawostronną pochodną największej wypukłej minoranty funkcji

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n) \sum_{k=1}^n \lambda_{kn} \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i-1}{k-1} S_i(t), \quad t \in (0, 1),$$

przy czym

$$S_i(t) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} C_{(k_1, \dots, k_i)}(t, \dots, t),$$

$$C_{(k_1, \dots, k_i)}(F(x_1), \dots, F(x_i)) = \mathbf{P}(X_{k_1} \leq x_1, \dots, X_{k_i} \leq x_i)$$

oraz  $C_{(k_1)}(u) = u$  dla wszystkich  $u \in [0, 1]$ . Równość w (2.1) jest osiągnięta wtedy i tylko wtedy, gdy  $F^{-1}(t) = c\underline{\varphi}(t)$  dla  $t \in (0, 1)$ , gdzie  $c > 0$  jest stałą normującą.

W przypadku deterministycznej liczności próby oraz znanej wartości oczekiwanej  $\mu = \mathbf{E}X$  i wariancji  $\sigma^2 = \mathbf{Var}X < \infty$ , standardowa modyfikacja dowodu twierdzenia 2.1 prowadzi do następującego uogólnienia rezultatu Hartleya–Davida–Gumbela na przypadek zmiennych losowych o dowolnej strukturze zależności opisanej znaną kopułą  $C_n$ :  $\mathbf{E}X_{n:n} \leq \mu + \sigma \left( \int_0^1 [\underline{\varphi}(t) - 1]^2 dt \right)^{1/2}$ , przy czym równość jest osiągnięta wtedy i tylko wtedy, gdy  $F^{-1}(t) = c[\underline{\varphi}(t) - 1]$  dla  $t \in (0, 1)$ , gdzie  $c > 0$  jest stałą normującą.

Zastępując w dowodzie twierdzenia 2.1 nierówność Schwarza – nierównością Höldera, Younga lub Jensena, otrzymamy ograniczenia dla wartości oczekiwanej  $L$ -statystyk wyrażone za pomocą  $p$ -norm, momentów wykładniczych lub kwantyli rozkładu pojedynczej obserwacji (zob. [A1, Rem. 2.3]).

Warunki osiągalności uzyskanych ograniczeń charakteryzują nietrywialne rozkłady prawdopodobieństwa (zob. [A1, Sect. 3.3.1 i Rem. 2.3]), umożliwiając konstruowanie testów zgodności (zob. np. [59]). Ograniczenia te dają również możliwość konstruowania przedziałów ufności i testów dla momentów statystyk porządkowych oraz oceny asymptotycznego zachowania momentów  $L$ -statystyk.

W pracy [A2] zaprezentowano inne podejście, które doprowadziło do wyznaczenia osiągalnych ograniczeń dla wartości oczekiwanej maksimum konkomitant dowolnie wybranych kolejnych statystyk porządkowych. Niech  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  będzie ciągiem par losowych o poprzednikach mających ten sam rozkład z ciągłą dystrybuantą  $F$  i następnikach posiadających rozkład z dystrybuantą  $G$ . Zmienna losowa  $Y$  odpowiadająca  $X_{j:n}$  – oznaczana symbolem  $Y_{[j:n]}$  – nazywana jest konkomitantą  $j$ -tej statystyki porządkowej lub



statystyką stowarzyszoną z  $j$ -tą statystyką porządkową. W przypadku par niezależnych o identycznych rozkładach, własności maksimów

$$V_{rsn} = \max\{Y_{[r:n]}, Y_{[r+1:n]}, \dots, Y_{[s:n]}\} \quad \text{oraz} \quad V_{r,n} = V_{rnn},$$

gdzie  $1 \leq r \leq s \leq n$ , badali Nagaraja i David [64] oraz Chu i in. [17].

W pracy [A2] rozważyliśmy przypadek ogólniejszy – niezależnych par losowych o niekoniecznie tym samym rozkładzie. Najpierw wyznaczyliśmy postać dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $V_{rsn}$ , pokazując że

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(V_{rsn} \leq y) &= a_{rs} \sum_{(i_r, \dots, i_s)} \int_{x_r < x_s} \left[ \prod_{k=r+1}^{s-1} P(Y_{i_k} \leq y | x_r \leq X_{i_k} \leq x_s) \times \right. \\ &\quad \left. \times P(Y_{i_r} \leq y | X_{i_r} = x_r) P(Y_{i_s} \leq y | X_{i_s} = x_s) \right] f_{rs}(x_r, x_s) dx_r dx_s, \end{aligned}$$

gdzie  $y \in \mathbb{R}$ ,  $a_{rs} = (n-s+r-1)!/n!$ ,  $f_{rs}$  jest gęstością wektora  $(X_{r:n}, X_{s:n})$ , zaś sumowanie odbywa się po wszystkich wariacjach bez powtórzeń  $(i_r, \dots, i_s)$  elementów zbioru  $[1; n]$ . Następnie założyliśmy, że zależność zmiennych  $X_i$  oraz  $Y_i$  jest opisana znaną kopułą  $C_i$  i sprawdziliśmy, że  $\mathbf{P}(V_{rsn} \leq y) = W(G(y))$  dla  $y \in \mathbb{R}$ , gdzie

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{\binom{n-s+r-1}{r-1}}{(s-r-1)!} \sum_{(i_r, \dots, i_s)} \int_0^1 \int_u^1 \prod_{k=r+1}^{s-1} [C_{i_k}(z, t) - C_{i_k}(u, t)] \times \\ &\quad \times C'_{i_r}(u, t) C'_{i_s}(z, t) u^{r-1} (1-z)^{n-s} dz du, \end{aligned}$$

przy czym  $s > r$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\prod_{k=i}^j a_k = 1$  dla  $i > j$ , natomiast  $C'_i$  oznacza pochodną cząstkową kopuły  $C_i$  względem pierwszej zmiennej. Łącząc powyższe z metodą Morigutiego i wykazując, że pochodna  $\underline{w}$  największej wypukłej minoranty funkcji  $W$  jest funkcją ograniczoną, uzyskaliśmy następujące

**Twierdzenie 2.2** ([A2], Thm. 2.1). *Jeżeli  $\sigma^2 = \mathbf{Var}Y < \infty$  i  $\mu = \mathbf{E}Y$ , to*

$$\mathbf{E}V_{rsn} \leq \mu + \sigma \left( \int_0^1 \underline{w}^2(x) dx - 1 \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

*Ograniczenie w (2.2) jest osiągalne.*

*Uwaga 1.* Twierdzenie 2.2 podaje postać osiągalnego oszacowania górnego dla maksymalnej statystyki porządkowej z próby zależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach.

W pracy [A2] wyznaczyliśmy również optymalne oszacowania na  $\mathbf{E}V_{r,n}$  w przypadku, gdy kopuły  $C_i$  nie są w pełni znane – wiadomo jedynie, że  $C_i$  są ograniczone z dołu i z góry przez znane kopuły (zob. [A2, Thm. 2.2]).

### 3. Całkowicie nieznana struktura zależności

W niniejszym rozdziale omówimy ideę, zaprezentowanej w artykule [A3], alternatywnej metody wyznaczania ograniczeń Rychlika [83] dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych z próby dowolnie zależnych zmiennych losowych o tym samym znanym rozkładzie, umożliwiającej podanie postaci ich odpowiedników dla obserwacji o różnych rozkładach. Postać optymalnych ograniczeń Rychlik uzyskał rozwiązując pewien nieskończenie wymiarowy problem programowania liniowego, zaś ich jednostajną osiągalność wykazał konstruując odpowiedni ciąg zmiennych losowych.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą dowolnymi zmiennymi losowymi. Ustalmy  $x, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Postać oszacowań dla kombinacji liniowej  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{P}(X_{j:n} \leq x)$  otrzymamy korzystając z wyniku Móriego i Székley'ego [60] mówiącego o tym, że zbiór możliwych wartości wektora momentów  $(\mathbf{E}f_1(\nu_n), \dots, \mathbf{E}f_l(\nu_n))$ , gdzie  $f_1, \dots, f_l$  są dowolnymi funkcjami rzeczywistymi na  $[0; n]$ , gdy zmienna losowa  $\nu_n$  ma dowolny rozkład prawdopodobieństwa na  $[0; n]$ , jest domkniętą otoczką wypukłą  $\text{conv} \{(f_1(i), \dots, f_l(i)) : i \in [0; n]\}$ . Stosując ten rezultat do  $\nu_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}}$ ,  $f_1(t) = t/n$  oraz  $f_2(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1}_{[j, \infty)}(t)$ , dostajemy

$$\left( F(x), \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{P}(X_{j:n} \leq x) \right) \in \text{conv} \left\{ \left( \frac{i}{n}, \sum_{j=1}^i \lambda_j \right) : i \in [0; n] \right\}, \quad (3.1)$$

a stąd wynika, że

$$\underline{C}(F(x)) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{P}(X_{j:n} \leq x) \leq \overline{C}(F(x)), \quad (3.2)$$

gdzie  $F(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(X_j \leq x)$ ,  $\mathbf{1}_A$  oznacza indyktor zbioru  $A$ , natomiast  $\underline{C}$  i  $\overline{C}$  to, odpowiednio, obwiednia dolna i obwiednia górna otoczki wypukłej z (3.1) (por. [83, Lem. 2]). W przypadku pojedynczych statystyk porządkowych, postać ograniczeń (3.2) poda-li Caraux i Gascuel [16], natomiast warunki konieczne i wystarczające ich osiągalności sformułował Rychlik [86].

Kluczowym elementem zaproponowanego w pracy [A3] dowodu jednostajnej osiągalności nierówności (3.2) dla jednakowo rozłożonych obserwacji, jest następujące uogólnienie wyniku Erdősa–Neveu–Rényi'ego [25] (zob. również [30, Lem. III.1]) na przypadek monotonicznych rodzin zdarzeń:

**Twierdzenie 3.1** ([A3], Thm. 2). *Niech  $\{Y(x) : x \in \mathbb{R}\}$  będzie procesem stochastycznym o wartościach w  $[0; n]$ . Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Istnieje przestrzeń probabilistyczna oraz taki ciąg wymiennalnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$  określonych na tej przestrzeni, że*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Y(x) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}},$$

*gdzie  $\stackrel{d}{=}$  oznacza równość rozkładów.*

- (ii) *Funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{P}(Y(x) \geq j)$  jest dystrybuantą dla każdego  $j \in [1; n]$ .*

Dowód twierdzenia 3.1 wymagał nowego pomysłu. Adaptacja oryginalnego dowodu nie była możliwa, ponieważ skonstruowana w przedstawiony tam sposób miara  $\check{\mathbf{P}}$  zależała od  $x$ . Idei dowodu podanego przez Sibuya [94] również nie można było wykorzystać, gdyż uzyskane w taki sposób rodziny zdarzeń mogły nie być monotoniczne.

Na mocy twierdzenia 3.1, do wykazania na przykład jednostajnej osiągalności górnego ograniczenia (3.2), wystarczy rozważyć proces stochastyczny  $\{Y(x) : x \in \mathbb{R}\}$  spełniający warunek  $\mathbf{P}(Y(x) = n_i) = p(x) = 1 - \mathbf{P}(Y(x) = n_{i+1})$  dla  $nF(x) \in [n_i, n_{i+1}]$ , gdzie  $i \in [1; m-1]$ , przy czym  $n_1, \dots, n_m$  oznaczają odcięte kolejnych końców odcinków tworzących łamaną  $\overline{C}$ , zaś  $p(t)$  jest tak dobrane, że  $\mathbf{E}f_1(Y(x)) = F(x)$ , a następnie sprawdzić, że  $\mathbf{E}f_2(Y(x)) = \overline{C}(F(x))$  dla  $nF(x) \in [n_i, n_{i+1}]$  oraz zauważyć, że  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{P}(Y(x) \geq j)$  jest dystrybuantą dla każdego  $j \in [1; n]$ .

Przedstawione podejście może być wykorzystane do wyznaczania nowych ograniczeń dla wybranych funkcjonałów statystyk porządkowych z prób dowolnie zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, jak i uzyskiwania jednostajnie osiągalnych nierówności typu Bonferroniego (zob. [A3, Sect. 3]).

#### 4. Próby o losowej liczności o pewnych znanych momentach

W rozdziale tym przedstawimy zaproponowane w [A4] rozszerzenie nierówności Arnolda–Groenevelda–Papadatosa [4, 70] dla wartości oczekiwanej  $L$ -statystyk, na przypadek prób o losowej liczności.

Niech  $N$  będzie zmienną losową przyjmującą wartości w  $\mathbb{N}$  i niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem dowolnych zmiennych losowych. Powiemy, że ciąg  $X_1, X_2, \dots$  jest *warunkowo wymierny* względem  $N$ , jeśli dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ , dla którego  $\mathbf{P}(N = n) > 0$ , następująca równość

$$\mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n \mid N = n) = \mathbf{P}(X_{\pi(1)} \leq x_1, \dots, X_{\pi(n)} \leq x_n \mid N = n)$$

zachodzi dla wszystkich permutacji  $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$  elementów zbioru  $[1; n]$  oraz wszystkich  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

Ustalmy liczby rzeczywiste  $\lambda_{in}$  oraz zdefiniujmy wielkości  $c_{in} = \underline{C}^{(n)}(i/n) - \underline{C}^{(n)}((i-1)/n)$  i  $d_{in} = \overline{C}^{(n)}(i/n) - \overline{C}^{(n)}((i-1)/n)$ , gdzie  $i \in [1; n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , zaś  $\underline{C}^{(n)}$  i  $\overline{C}^{(n)}$  to, odpowiednio, dolna i górna obwiednia otoczki wypukłej  $\text{conv} \left\{ (i/n, \sum_{j=1}^i \lambda_{jn}) : i \in [0; n] \right\}$ .

**Twierdzenie 4.1** ([A4], Thm. 2.1). *Jeżeli  $\mathbf{E} \sum_{i=1}^N X_i^2 < \infty$  i  $\sup_{n \geq 1} n^{-1} \sum_{i=1}^n |\lambda_{in}| < \infty$ , to*

$$\mathbf{E} \sum_{i=1}^N \lambda_{iN} X_{i:N} \leq \mathbf{E} \left( \overline{X}_N \sum_{i=1}^N \lambda_{iN} \right) + \left[ \mathbf{E} \sum_{i=1}^N (c_{iN} - \overline{\lambda}_N)^2 \right]^{1/2} \Delta_N \quad (4.1)$$

oraz

$$\mathbf{E} \sum_{i=1}^N \lambda_{iN} X_{i:N} \geq \mathbf{E} \left( \overline{X}_N \sum_{i=1}^N \lambda_{iN} \right) - \left[ \mathbf{E} \sum_{i=1}^N (d_{iN} - \overline{\lambda}_N)^2 \right]^{1/2} \Delta_N, \quad (4.2)$$

gdzie  $\overline{x}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\overline{\lambda}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_{in}$ , natomiast

$$\Delta_N^2 = \mathbf{E} \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{\mu}_N)^2 - \mathbf{E} \left[ N (\overline{X}_N - \overline{\mu}_N)^2 \right],$$

przy czym  $\overline{\mu}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i$ . Ponadto jeżeli dla każdego  $n$  ciąg  $(\lambda_{in})_{i=1}^n$  jest niemalejący (odpowiednio, nierosnący), to dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej  $N$  istnieje ciąg zmiennych losowych  $(X_i)_{i=1}^\infty$  warunkowo wymierny względem  $N$ , dla którego w nierówności (4.1) (odpowiednio, (4.2)) osiągnąca jest równość.

Odnajmy, że (4.1) i (4.2) sprowadzają się do nierówności Papadatosa [71, Thm. 2.1, Eq. (2.2) oraz Thm. 2.2] w przypadku, gdy  $\mathbf{P}(N = n) = 1$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ . Warto podkreślić, że osiągalne ograniczenia (4.1) i (4.2) nie są bezpośrednimi wnioskami z rezultatów Papadatosa – nie można ich otrzymać np. metodą warunkowania (zob. [A4, Example 2.1]). Wyznaczenie postaci (4.1) i (4.2) wymagało zastosowania dwuetapowego oszacowania, dla którego punktem wyjścia jest tożsamość Abela. Osiągalność ograniczeń wykazano konstruując ciąg zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots$  warunkowo wymierny względem  $N$ , spełniający warunki osiągalności obu szacowań.

Oszacowania (4.1) i (4.2) są użyteczne pod warunkiem, że znamy wartości występujących w nich momentów. Można je wyznaczyć np. w przypadku, gdy znany jest rozkład  $N$  oraz dla wszystkich  $1 \leq i < j < \infty$  znane są warunkowe wartości oczekiwane  $\mathbf{E}[X_i|N]$ , warunkowe wariancje  $\mathbf{Var}[X_i|N]$  i warunkowe kowariancje  $\mathbf{Cov}[X_i, X_j|N]$ . Gdy znamy jedynie rozkład  $N$  oraz  $\mathbf{E}[X_i|N]$  i  $\mathbf{Var}[X_i|N]$  dla  $i \geq 1$ , możemy skorzystać z osiągalnych ograniczeń postaci (4.1) i (4.2), w których  $\Delta_N$  zastąpiono (nie mniejszą) wielkością  $\underline{\Delta}_N$ , gdzie  $\underline{\Delta}_N^2 = \mathbf{E} \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{\mu}_N)^2 - \mathbf{E} \left[ \sqrt{N} (\overline{X}_N - \overline{\mu}_N) \right]^2$ . Jeżeli wariancje obserwacji nie są

skończone, lecz  $\mathbf{E}|X_i \ln X_i| < \infty$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , to użyteczne mogą być oszacowania uzyskane za pomocą nierówności Younga (zob. [A4, Thm. 4.1]).

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 4.1 jest następujące rozszerzenie klasycznej nierówności Samuelsona [92]

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n:n} - \bar{x}_n) p_n \right]^2 \leq \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 \right),$$

gdzie  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych, zaś  $(p_n)_{n=1}^{\infty}$  jest dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa na  $\mathbb{N}$  (zob. [A4, Sect. 5.6]). Przykłady statystycznych i aktuarialnych zastosowań twierdzenia 4.1 oraz ograniczeń [A4, Thm. 4.1] wyrażonych za pomocą wartości oczekiwanych i entropii obserwacji podano w [A4, Subsect. 5.4, 5.5 i 5.6].

## 5. Próby maksymalnie stabilne

W rozdziale tym zaprezentujemy wyniki pracy [A5] dotyczące jednego z dwóch rozważanych w niej modeli stochastycznej zależności – modelu obserwacji maksymalnie stabilnych. Pojęcie to wprowadził Papadatos [71].

**Definicja 1.** Niech  $j \in [1; n]$ . Mówimy, że zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  są maksymalnie stabilne rzędu  $j$ , gdy dla wszystkich  $j$ -elementowych podzbiorów  $\{k_1, \dots, k_j\}$  zbioru  $[1; n]$ , zmienne losowe  $\max\{X_{k_1}, \dots, X_{k_j}\}$  mają ten sam rozkład.

**Twierdzenie 5.1** ([A5], Thm. 2.1). *Niech  $j \in [1; n]$  i  $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .*

(i) *Jeżeli zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  są maksymalnie stabilne rzędu  $j$  oraz*

$$F_{(j)}(x) = \mathbf{P}(\max\{X_1, \dots, X_j\} \leq x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

to dla każdego  $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{C}_j \left( F_{(j)}(x) \right) \leq \sum_{k=j}^n \lambda_k \mathbf{P}(X_{k:n} \leq x) \leq \overline{C}_j \left( F_{(j)}(x) \right), \quad (5.2)$$

gdzie  $\underline{C}_j$  i  $\overline{C}_j$  oznaczają, odpowiednio, obwiednię dolną i obwiednię górną otoczki wypukłej zbioru

$$\left\{ \left( \frac{(i)_j}{(n)_j}, \sum_{k=j}^i \lambda_k \right) : i \in [0; n] \right\},$$

przy czym  $(i)_j = i(i-1)\cdots(i-j+1)$  dla  $i \geq j$  oraz  $(i)_j = 0$  dla  $i < j$ .

(ii) *Ponadto dla dowolnej dystrybuanty  $F_{(j)}$  istnieją wymienne zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  spełniające warunek (5.1), dla których równość w pierwszej (odpowiednio, drugiej) nierówności w (5.2) jest osiągnięta dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .*

Postać ograniczeń (5.2) wyznaczono, stosując – opisaną w trzecim rozdziale – metodę obwiedni zbioru momentów. Osiągalność ograniczeń udowodniono, wykorzystując następujące uogólnienie twierdzenia 3.1.

**Lemat 5.2** ([A5], Lem. 2.2). *Niech  $j \in [1; n]$  i niech  $\{\nu(x) : x \in \mathbb{R}\}$  będzie procesem stochastycznym o wartościach w  $\mathcal{Z}_j = \left\{ 0, \binom{j}{j}, \binom{j+1}{j}, \dots, \binom{n}{j} \right\}$ . Następujące warunki są równoważne:*

(i) *Istnieje przestrzeń probabilistyczna oraz takie wymienne zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  określone na tej przestrzeni, że*

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \nu(x) \stackrel{d}{=} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq n} \mathbf{1}_{\{X_{k_1} \leq x, \dots, X_{k_j} \leq x\}}.$$

(ii) Funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{P}(\nu(x) \geq i)$  jest dystrybuantą dla każdego  $i \in \mathcal{Z}_j \setminus \{0\}$ .

Twierdzenie 5.1 prowadzi do osiągalnych ograniczeń dla wartości oczekiwanej  $L$ -statystyk. W dalszej części niniejszego opracowania będziemy zakładać, że występujące w niej całki istnieją i są skończone.

**Twierdzenie 5.3** ([A5], Thm. 3.1(i)). *Niech  $j \in [1; n]$  i  $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Jeżeli  $X_1, \dots, X_n$  są maksymalnie stabilne rzędu  $j$  oraz  $\mathbf{P}(X_{j:j} \leq x) = F_{(j)}(x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , to*

$$\int_0^1 F_{(j)}^{-1}(t) d\bar{C}_j(t) \leq \mathbf{E} \sum_{k=j}^n \lambda_k X_{k:n} \leq \int_0^1 F_{(j)}^{-1}(t) d\underline{C}_j(t), \quad (5.3)$$

gdzie  $\bar{C}_j$  i  $\underline{C}_j$  są zdefiniowane tak jak w twierdzeniu 5.1. Oba ograniczenia w (5.3) są osiągalne, tzn. dla dowolnej dystrybuanty  $F_{(j)}$  istnieją wymienne losowe  $X_1, \dots, X_n$ , spełniające warunek:  $\mathbf{P}(X_{j:j} \leq x) = F_{(j)}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , dla których w pierwszej (odpowiednio, drugiej) nierówności zachodzi równość.

*Uwaga 2.* W przypadku pojedynczych statystyk porządkowych, górne ograniczenia (5.2) i dolne ograniczenia (5.3) – w inny sposób – wyznaczył Papadatos [71]. Obustronne ograniczenia (5.2) i (5.3) dla  $j = 1$ , czyli dla dowolnie zależnych obserwacji o tym samym rozkładzie, podał Rychlik [83].

Twierdzenie 5.3 może stanowić punkt wyjścia do poszukiwania nowych oszacowań dla wartości oczekiwanej  $L$ -statystyk. Łącząc ten rezultat z metodą Morigutiego, otrzymamy ograniczenia wyrażone za pomocą dwóch pierwszych momentów  $X_{j:j}$ . Oznaczmy przez  $\underline{c}_j$  prawostronną pochodną funkcji  $\underline{C}_j$ .

**Twierdzenie 5.4** ([A5], Prop. 3.2). *Ustalmy  $j \in [1; n]$  oraz  $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą zmiennymi losowymi maksymalnie stabilnymi rzędu  $j$ , o znanej wartości oczekiwanej  $\mathbf{E}X_{j:j} = \mu_{(j)}$  i wariancji  $\mathbf{Var}X_{j:j} = \sigma_{(j)}^2$ . Wówczas*

$$\mathbf{E} \sum_{k=j}^n \lambda_k (X_{k:n} - \mu_{(j)}) \leq u(j) \sigma_{(j)}, \quad (5.4)$$

gdzie

$$u(j) = \left( \int_0^1 \underline{c}_j^2(t) dt - \left( \sum_{k=j}^n \lambda_k \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Jeżeli  $u(j) > 0$ , to ograniczenie (5.4) jest osiągalne dla pewnych wymiennych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$ , dla których funkcja kwantylowa maksimum  $X_{j:j}$  ma postać

$$F_{(j)}^{-1}(t) = \mu_{(j)} + \left( \underline{c}_j(t) - \sum_{k=j}^n \lambda_k \right) \sigma_{(j)} / u(j).$$

Jeżeli  $u(j) = 0$ , to dla dowolnej dystrybuanty  $F_{(j)}$  istnieją takie wymienne losowe  $X_1, \dots, X_n$ , że  $\mathbf{P}(X_{j:j} \leq x) = F_{(j)}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , dla których ograniczenie w (5.4) jest osiągalne.

*Uwaga 3.* Dolne odpowiedniki ograniczeń (5.4) podano w [A5, Prop. 3.2]. Kładąc  $j = 1$  w twierdzeniu 5.4, otrzymujemy szczególny przypadek ograniczeń Rychlika [84]. Przy dodatkowych założeniach o rozkładzie statystyki  $X_{j:j}$  można wyznaczyć oszacowania lepsze od (5.4) (zob. [A5, Prop. 3.4]).

Łatwo spostrzec, że  $c_j = \sum_{i=j}^n a_i \mathbf{1}_i$ , gdzie

$$a_i = \binom{n}{j} \frac{C_j((i)_j/(n)_j) - C_j((i-1)_j/(n)_j)}{(i)_j - (i-1)_j}, \quad (5.5)$$

zaś  $\mathbf{1}_i$  jest indykatozem przedziału  $[(i-1)_j/(n)_j, (i)_j/(n)_j]$ . Oznacza to, że funkcja kwantylowa występująca w (5.5) jest funkcją schodkową o skokach w pewnych punktach zbioru  $\{(i)_j/(n)_j : i = j, j+1, \dots, n-1\}$ . Twierdzenie 5.4 umożliwia tym samym uzyskanie osiągalnych deterministycznych odpowiedników nierówności (5.4), stanowiących uogólnienie klasycznej nierówności Samuelsona (por. [92, 87]).

Niech  $j \in [1; n]$  i  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Dla każdego  $j$ -elementowego podzbioru  $I$  zbioru  $[1; n]$ , oznaczmy przez  $x_{I:j}$  maksimum zbioru  $\{x_l : l \in I\}$ . Zdefiniujmy wielkości

$$\bar{x}_{j:j} = \binom{n}{j}^{-1} \sum_I x_{I:j} \quad \text{oraz} \quad s_{j:j}^2 = \binom{n}{j}^{-1} \sum_I (x_{I:j} - \bar{x}_{j:j})^2, \quad (5.6)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich  $j$ -elementowych zbiorach  $I \subset [1; n]$ .

**Wniosek 5.5** ([A5], Cor. 3.3). *Niech  $j \in [1; n]$  oraz  $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Wówczas dla dowolnych  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,*

$$\sum_{k=j}^n \lambda_k (x_{k:n} - \bar{x}_{j:j}) \leq u(j) s_{j:j}, \quad (5.7)$$

gdzie

$$u(j) = \left( \binom{n}{j}^{-1} \sum_{i=j}^n a_i^2 \binom{i-1}{j-1} - \left( \sum_{k=j}^n \lambda_k \right)^2 \right)^{1/2},$$

zaś  $a_i, \bar{x}_{j:j}$  i  $s_{j:j}^2$  określone są wzorami (5.5) i (5.6). Jeżeli  $u(j) > 0$ , to równość w nierówności (5.7) jest osiągnięta, gdy

$$x_1 = x_2 = \dots = x_j = \alpha + b_j \beta$$

oraz

$$x_i = \alpha + b_i \beta, \quad i = j+1, j+2, \dots, n,$$

przy czym  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $\beta > 0$  są dowolne, natomiast

$$b_k = \frac{a_k - \sum_{i=j}^n \lambda_i}{\left[ \binom{n}{j}^{-1} \sum_{i=j}^n a_i^2 \binom{i-1}{j-1} - \left( \sum_{i=j}^n \lambda_i \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad k = j, j+1, \dots, n.$$

Jeżeli  $u(j) = 0$ , to równość w (5.7) zachodzi dla wszystkich  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

Twierdzenie 5.3 można również wykorzystać do badania stabilności wartości oczekiwanej  $L$ -statystyki z próby o znanej maksymalnie stabilnej strukturze zależności ze względu na maksymalnie stabilne odchylenia od tej struktury.

Ustalmy  $j \in [1; n]$  i  $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą zmiennymi losowymi maksymalnie stabilnymi rzędu  $j$  oraz  $F_{(j)}(x) = \mathbf{P}(X_{j:j} \leq x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Niech dalej  $D: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  będzie taką kopułą, że

$$D_{k_1, \dots, k_j}(t, \dots, t) = D_{1, \dots, j}(t, \dots, t) =: \delta_j(t), \quad t \in [0, 1],$$

dla wszystkich  $1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq n$ , gdzie  $D_{l_1, \dots, l_i}(t, \dots, t) = D(z_1, \dots, z_n)$ , przy czym  $z_m = t$  dla  $m \in \{l_1, \dots, l_i\}$  oraz  $z_m = 1$  w przypadku przeciwnym ( $1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq$

$n, i = 1, \dots, n$ ). Załóżmy, że  $\delta_j$  jest funkcją ściśle rosnącą i rozważmy zmienne losowe  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  o łącznym rozkładzie z dystrybuantą

$$\mathbf{P}(Y_1 \leq x_1, \dots, Y_n \leq x_n) = D(F(x_1), \dots, F(x_n)), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

gdzie  $F(x) = \delta_j^{-1}(F_{(j)}(x))$ . Oznaczmy  $k$ -tą statystykę porządkową w próbie  $Y_1, \dots, Y_n$  przez  $Y_{k:n}$ . Skoro

$$\mathbf{P}(Y_{j:j} \leq x) = D_{1,\dots,j}(F(x), \dots, F(x)) = \delta_j(F(x)) = F_{(j)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

to zmienne losowe  $Y_{j:j}$  i  $X_{j:j}$  mają ten sam rozkład.

**Twierdzenie 5.6** ([A5], Prop. 4.1). *Jeżeli przekątna  $\delta_j$  kopuły  $D_{1,\dots,j}$  jest funkcją ściśle rosnącą oraz znana jest wartość oczekiwana  $\mathbf{E}X_{j:j} = \mu_{(j)}$  i wariancja  $\mathbf{Var}X_{j:j} = \sigma_{(j)}^2$ , to*

$$-l_b(j)\sigma_{(j)} \leq \mathbf{E} \sum_{k=j}^n \lambda_k X_{k:n} - \mathbf{E} \sum_{k=j}^n \lambda_k Y_{k:n} \leq u_b(j)\sigma_{(j)}, \quad (5.8)$$

gdzie

$$l_b(j) = \left( \int_0^1 [\bar{h}_j(t)]^2 dt \right)^{1/2}, \quad u_b(j) = \left( \int_0^1 [\underline{h}_j(t)]^2 dt \right)^{1/2},$$

przy czym  $\underline{h}_j$  (odpowiednio,  $\bar{h}_j$ ) oznacza pochodną prawostronną największej wypukłej majoranty (odpowiednio, najmniejszej wklęsłej minoranty) funkcji  $H_j(t) = \underline{C}_j(t) - \Phi_j(\delta_j^{-1}(t))$ , zaś

$$\Phi_j(t) = \sum_{k=j}^n \lambda_k \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i-1}{k-1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} D_{k_1, \dots, k_i}(t, \dots, t).$$

Jeżeli  $l_b(j) > 0$  i  $u_b(j) > 0$ , to dolne ograniczenie i górne ograniczenie w (5.8) jest osiągane dla pewnych wymiernych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$ , dla których funkcja kwantylowa  $F_{(j)}^{-1}$  maksimum  $X_{j:j}$  jest, odpowiednio, postaci

$$F_{(j)}^{-1}(t) = \mu_{(j)} - \bar{h}_j(t)\sigma_{(j)}/l_b(j) \quad \text{i} \quad F_{(j)}^{-1}(t) = \mu_{(j)} + \underline{h}_j(t)\sigma_{(j)}/u_b(j).$$

Jeżeli  $l_b(j) = 0$  ( $u_b(j) = 0$ ), to dla dowolnej dystrybuanty  $F_{(j)}$  równość w pierwszej (drugiej) nierówności w (5.8) jest osiągana dla pewnych takich wymiernych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$ , że  $\mathbf{P}(X_{j:j} \leq x) = F_{(j)}(x)$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .

Dla  $j = 1$  oraz kopuły niezależności  $D(t_1, \dots, t_n) = t_1 \cdot \dots \cdot t_n$ , jawne postaci ograniczeń dla, odpowiednio,  $\mathbf{E}X_{k:n} - \mathbf{E}Y_{k:n}$  oraz  $\mathbf{E}(X_{k+1:n} - X_{k:n}) - \mathbf{E}(Y_{k+1:n} - Y_{k:n})$ , wyrażonych za pomocą, odpowiednio,  $p$ -normy ( $1 \leq p \leq \infty$ ) oraz odchylenia standardowego, zostały wyznaczone przez Rychlika [89, 90].

## 6. Nieparametryczne otoczenia niezależności

Praca [A6] jest poświęcona badaniu wpływu zależności na wartość oczekiwaną  $L$ -statystyki w przypadku, gdy nieznaną strukturą zależności obserwacji należy do pewnego nieparametrycznego otoczenia niezależności.

Niech  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \geq 2$ , będą nieujemnymi zmiennymi losowymi o dystrybuantach, odpowiednio,  $F_1, \dots, F_n$  i niech  $X'_1, \dots, X'_n$  będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że  $X'_i \stackrel{d}{=} X_i$  dla  $i \in [1; n]$ . Symbolem  $X'_{k:n}$  oznaczmy  $k$ -tą statystykę porządkową w próbie  $X'_1, \dots, X'_n$ , zaś symbolem  $X'_{1:I}$  oznaczmy  $\min\{X'_i : i \in I\}$ ,  $\emptyset \neq I \subset [1; n]$ .

Przypomnijmy, że  $n$ -kopała Farliego–Gumbela–Morgensterna (krótko,  $n$ -kopała FGM) zdefiniowana jest wzorem

$$C(u_1, \dots, u_n) = \left( 1 + \sum_{t=2}^n \sum_{I \in \mathcal{C}_t} \rho_I \prod_{j \in I} (1 - u_j) \right) \prod_{i=1}^n u_i, \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n,$$

gdzie  $\mathcal{C}_t$  to rodzina wszystkich  $t$ -elementowych podzbiorów zbioru  $[1; n]$ , natomiast parametry  $\rho_I \in [-1, 1]$ ,  $I \in \mathcal{I}_2 = \bigcup_{t=2}^n \mathcal{C}_t$ , spełniają warunek

$$1 + \sum_{t=2}^n \sum_{I \in \mathcal{C}_t} \rho_I \prod_{i \in I} \psi_i \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \psi_1, \dots, \psi_n \in \{-1, 1\} \quad (6.1)$$

(zob. np. [48]). Zbiór dopuszczalnych wartości parametrów  $\Theta$  jest domkniętym wypukłym wielotopem w  $\mathbb{R}^{2^n - n - 1}$  o niepustym wnętrzu.

Ustalmy liczby rzeczywiste  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , zdefiniujemy zmienne losowe  $L = \sum_{k=1}^n \lambda_k X_{k:n}$  i  $L' = \sum_{k=1}^n \lambda_k X'_{k:n}$  oraz określmy wielkości

$$\tilde{\lambda}_t = \sum_{k=1}^t \lambda_{n-k+1} (-1)^{t-k} \binom{t-1}{k-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6.2)$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia:  $\text{card } A$  – moc zbioru  $A$ ,  $\text{int } A$  – wnętrze zbioru  $A$ ,  $\mathcal{C}_{k,I} = \{Z \subset I : \text{card } Z = k\}$  oraz  $\text{sgn}(a) = -\mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(a) + \mathbf{1}_{(0, \infty)}(a)$  dla  $a \in \mathbb{R}$ .

Poniżej przedstawimy górne oszacowania na  $\mathbf{E}(L - L')$  dla dwóch typów otoczeń niezależności, wyrażone za pomocą momentów próby niezależnych zmiennych losowych  $X'_1, \dots, X'_n$  oraz parametrów liczbowych opisujących wielkość otoczeń. Ich dolne odpowiedniki można otrzymać, korzystając z zależności  $\inf \mathbf{E} \sum_{k=1}^n \lambda_k X_{k:n} = -\sup \mathbf{E} \sum_{k=1}^n (-\lambda_k) X_{k:n}$ . Postać ograniczeń wyznaczono dokonując dwu- lub trzyetapowych oszacowań. Osiągalność ograniczeń uzyskano, przeprowadzając analizę warunków osiągalności użytych nierówności oraz stosując zasadę włączeń i wyłączeń.

Najpierw zaprezentujemy oszacowania dla otoczeń niezależności typu Kołmogorowa. Będziemy używać konwencji, że  $0/0 = 0$ .

**Twierdzenie 6.1** ([A6], Thm. 1). *Załóżmy, że dla dowolnego  $t \in [2; n]$  oraz dowolnych  $I \in \mathcal{C}_t$  istnieją takie  $\varepsilon_I \geq 0$ , że*

$$\sup_{x>0} \frac{|\mathbf{P}(\bigcap_{i \in I} \{X_i > x\}) - \prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i > x)|}{\prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i > x)} \leq \varepsilon_I.$$

Wówczas

$$\mathbf{E}(L - L') \leq \sum_{t=2}^n |\tilde{\lambda}_t| \sum_{I \in \mathcal{C}_t} \varepsilon_I \mathbf{E} X'_{1:I}. \quad (6.3)$$

Jeżeli wielkości  $\varepsilon_I$  są dostatecznie małe, tzn.  $(\tilde{\rho}_I)_{I \in \mathcal{I}_2} \in \text{int } \Theta$ , gdzie  $\tilde{\rho}_I = \sum_{k=2}^t (-1)^k \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k) \sum_{J \in \mathcal{C}_{k,I}} \varepsilon_J$ , to równość w nierówności (6.3) osiągnana jest dla pewnego wektora losowego  $(X_1, \dots, X_n)$  o  $n$ -kopule FGM z parametrami  $\rho_I = \tilde{\rho}_I \prod_{i \in I} p_i^{-1}$  oraz o jednowymiarowych rozkładach brzegowych o dystrybuantach  $F_i = p_i \mathbf{1}_{[0, c_i)} + \mathbf{1}_{[c_i, \infty)}$ ,  $i \in [1; n]$ , gdzie  $c_i$  są dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, zaś  $p_1, \dots, p_n \in (0, 1)$  są takie, że  $(\rho_I)_{I \in \mathcal{I}_2} \in \text{int } \Theta$ .

Kolejne dwa twierdzenia prezentują oszacowania na  $\mathbf{E}(L - L')$  dla dwóch rodzajów otoczeń niezależności typu chi-kwadrat.



**Twierdzenie 6.2** ([A6], Thm. 3). *Załóżmy, że dla dowolnego  $t \in [2; n]$  oraz dowolnych  $I \in \mathcal{C}_t$  istnieją takie  $\varepsilon_I \geq 0$ , że*

$$\int_0^\infty \frac{[\mathbf{P}(\bigcap_{i \in I} \{X_i > x\}) - \prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i > x)]^2}{\prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i > x)} dx \leq \varepsilon_I^2.$$

Wtedy

$$\mathbf{E}(L - L') \leq \sum_{t=2}^n |\tilde{\lambda}_t| \sum_{I \in \mathcal{C}_t} \varepsilon_I (\mathbf{E}X'_{1:I})^{1/2}, \quad (6.4)$$

gdzie  $\tilde{\lambda}_t$  dane są wzorem (6.2). Ograniczenie (6.4) jest osiągnięte, gdy  $(X_1, \dots, X_n)$  ma  $n$ -kopolę FGM z parametrami

$$\rho_I = \left( \prod_{i \in I} p_i \right)^{-1} \sum_{k=2}^t (-1)^k \operatorname{sgn}(\tilde{\lambda}_k) \sum_{J \in \mathcal{C}_{k,I}} \varepsilon_J c_J^{-1/2} \left( \prod_{j \in J} (1 - p_j) \right)^{-1/2},$$

$I \in \mathcal{C}_t$ ,  $t \in [2; n]$ , przy czym  $c_J = \min\{c_i : i \in J\}$ , oraz jednowymiarowe rozkłady brzegowe o dystrybuantach  $F_i = p_i \mathbf{1}_{[0, c_i)} + \mathbf{1}_{[c_i, \infty)}$ ,  $i \in [1; n]$ , gdzie  $p_1, \dots, p_n \in (0, 1)$  i  $c_1, \dots, c_n > 0$  są takie, że spełniony jest warunek (6.1).

**Twierdzenie 6.3** ([A6], Thm. 5). *Załóżmy, że dla dowolnego  $t \in [2; n]$  oraz dowolnych  $I \in \mathcal{C}_t$  istnieją  $\varepsilon_I \geq 0$ , dla których*

$$\int_0^\infty \frac{[\mathbf{P}(\bigcap_{i \in I} \{X_i \leq x\}) - \prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i \leq x)]^2}{1 - \prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i \leq x)} dx \leq \varepsilon_I^2.$$

Wtedy

$$\mathbf{E}(L - L') \leq \sum_{t=2}^n |\hat{\lambda}_t| \sum_{I \in \mathcal{C}_t} \varepsilon_I (\mathbf{E}X'_{I:I})^{1/2}, \quad (6.5)$$

gdzie  $X'_{I:I} = \max\{X_i : i \in I\}$  oraz

$$\hat{\lambda}_t = \sum_{k=1}^t \lambda_k (-1)^{t-k} \binom{t-1}{k-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ograniczenie (6.5) jest osiągnięte, gdy  $(X_1, \dots, X_n)$  ma  $n$ -kopolę FGM z parametrami

$$\rho_I = \left( \prod_{i \in I} (1 - p_i) \right)^{-1} \sum_{k=2}^t (-1)^{t-k+1} \operatorname{sgn}(\hat{\lambda}_k) \sum_{J \in \mathcal{C}_{k,I}} \varepsilon_J \hat{c}_J^{-1/2} \left( 1 - \prod_{j \in J} p_j \right)^{1/2} \left( \prod_{j \in J} p_j \right)^{-1},$$

$I \in \mathcal{C}_t$ ,  $t \in [2; n]$ , przy czym  $\hat{c}_J = \max\{c_i : i \in I\}$ , oraz jednowymiarowe rozkłady brzegowe o dystrybuantach  $F_i = p_i \mathbf{1}_{[0, c_i)} + \mathbf{1}_{[c_i, \infty)}$ ,  $i \in [1; n]$ , gdzie  $p_1, \dots, p_n \in (0, 1)$  i  $c_1, \dots, c_n > 0$ , są takie, że spełniony jest warunek (6.1).

*Uwaga 4.* Nierówności (6.3), (6.4) i (6.5) są pierwszymi w literaturze osiągalnymi nierównościami dla wartości oczekiwanych dowolnych  $L$ -statystyk z próby zależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach i częściowo znanej niewymienialnej strukturze zależności.

## 7. Znane wielowymiarowe rozkłady brzegowe

W niniejszym rozdziale omówimy rezultaty prac [A7] i [A8], uogólniające wyniki Kempermana [47] dla  $k$ -tkami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, na przypadek wektorów losowych o wartościach w  $\mathbb{R}^n$ , których  $k$ -wymiarowe rozkłady brzegowe mają tę samą wymienialną kopułę kawałkami jednostajną lub tę samą wymienialną kopułę typu mieszanego.

Zacznijmy od określenia rodzin generatorów klas Fréchet’a  $n$ -kopuł o identycznych, kawałkami jednostajnych, wymienialnych kopułach brzegowych. Niech  $n \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\mathcal{D}_r$  oznacza zbiór wszystkich takich  $(r+2)$ -elementowych ciągów liczb rzeczywistych  $d_0, d_1, \dots, d_{r+1}$ , że  $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_r < d_{r+1} = 1$  oraz  $d = (d_0, d_1, \dots, d_{r+1}) \in \mathcal{D}_r$ . Ciąg  $d$  wyznacza rozbięcie przedziału  $(0, 1]$  na  $r+1$  rozłącznych przedziałów  $V_i = (d_i, d_{i+1}]$ ,  $i \in [0; r]$ . Rozbięcie to wyznacza z kolei rozbięcie kostki  $(0, 1]^n$  na  $(r+1)^n$  prostopadłościennych bloków postaci  $V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n}$ , gdzie  $i_1, \dots, i_n \in [0; r]$ . Oznaczmy przez  $\mathcal{Q}_d^*$  rodzinę wszystkich łącznych rozkładów  $n$  wymienialnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jednostajnym na  $(0, 1]$ , których obcięcia do bloków  $V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n}$ ,  $i_1, \dots, i_n \in [0; r]$ , są jednostajne na tych blokach. Przykłady takich rozkładów podano w [A7, Example 2.1 i 2.2]. Kopuły stowarzyszone z rozkładami z  $\mathcal{Q}_d^*$  są znane w literaturze jako kopuły wieloliniowe lub szachownicowe (ang. *multilinear or checkerboard copulas*; zob. np. [23]). Kopuły te odgrywają kluczową rolę w modelowaniu i estymacji struktur zależności dyskretnych wektorów losowych (zob. [33] i [34]).

Zauważmy, że jeśli  $(U_1, \dots, U_n)$  ma rozkład  $Q^* \in \mathcal{Q}_d^*$ , to zmienne losowe  $U_1, \dots, U_n$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $(U_1, \dots, U_n) \in V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n}$ , gdzie  $i_1, \dots, i_n \in [0; r]$ . Odnotujmy również, że dla  $r = 0$  otrzymujemy rozkład jednostajny na kostce  $(0, 1]^n$ , stowarzyszony z  $n$ -kopułą niezależności. Z kolei dla  $r \geq 1$ , jako przypadki szczególne, uzyskujemy rozkłady prowadzące do sum porządkowych (ang. *ordinal sums*) kopuł niezależności, jak i rozkłady odpowiadające mieszanom kopuł rzadkich (ang. *sparse copulas*) wyznaczonych przez ciągi kopuł niezależności (por. [23]).

Niech  $\mathcal{Q}_k(Q^*)$ , gdzie  $1 \leq k \leq n-1$  i  $Q^* \in \mathcal{Q}_d^*$ , oznacza rodzinę wszystkich miar probabilistycznych na  $(0, 1]^n$ , mających takie same  $k$ -wymiarowe rozkłady brzegowe jak  $Q^*$ . W przypadku szczególnym jednostajnego rozkładu  $Q^*$  na  $(0, 1]^n$ ,  $\mathcal{Q}_k(Q^*)$  jest rodziną wszystkich miar probabilistycznych na  $(0, 1]^n$  o jednostajnych  $k$ -wymiarowych rozkładach brzegowych. Przykład [A7, Example 2.3] pokazuje, że dla dowolnego  $Q^* \in \mathcal{Q}_d^*$  rodzina  $\mathcal{Q}_k(Q^*)$  jest nieprzeliczalna oraz że elementami  $\mathcal{Q}_k(Q^*)$  są zarówno rozkłady wymienialne, jak i niewymienialne. Świadczy to o nietrywialności nieregularnego układu rozkładów brzegowych  $\mathcal{Q}_k(Q^*)$  (zob. np. [80]).

Niech  $1 \leq k \leq n$  i  $Q^* \in \mathcal{Q}_d^*$ . Oznaczmy przez  $C^*$  kopułę stowarzyszoną z rozkładem  $Q^*$ , zaś przez  $C_\ell^*$  – kawałkami jednostajną kopułę  $\ell$ -wymiarowych rozkładów brzegowych  $Q_\ell^*$  rozkładu  $Q^*$ . Przyjmijmy, że  $C_n^* = C^*$  oraz  $C_1^*(u) = u$  dla  $u \in [0, 1]$ .

Wprowadźmy następującą definicję:

**Definicja 2** ([A7], Sect. 3). Mówimy, że  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  jest wektorem  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych lub że  $\mathbf{X}$  jest  $C_k^*$ -zależny, gdy dla wszystkich  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  wektory  $(X_{j_1}, \dots, X_{j_k})$  mają tę samą kopułę  $C_k^*$ .

Odnotujmy, że  $C_k^*$ -zależne zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  nie muszą mieć kopuły  $C^*$ , chyba że  $k = n$ . W istocie dla  $k = 1$  otrzymujemy model dowolnie zależnych zmiennych losowych, natomiast dla  $r = 0$  i  $2 \leq k \leq n-1$  – model  $k$ -niezależności, rozważany przez Kempermana [47].

W pracy [A7] zaprezentowano metodę wyznaczania punktowo osiągalnych ograniczeń dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych w próbie  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Jej zasadniczym elementem jest charakteryzacja rodziny wszystkich możliwych rozkładów wektora losowego opisującego liczby sukcesów  $q$  rodzajów w skończonej liczbie  $C_k^*$ -zależnych doświadczeniach, z których każde prowadzi do sukcesu jednego rodzaju w przypadku, gdy prawdopodobieństwa sukcesów poszczególnych rodzajów są ustalone.

Niech  $F$  będzie dystrybuantą na  $\mathbb{R}$ . Określmy wielkości  $\tilde{d}_i = F^{-1}(d_i)$  dla  $i \in [1; r]$ . Będziemy zakładać, że

$$F(\tilde{d}_i) = d_i \quad \text{dla } i \in [1; r]; \quad (7.1)$$

warunek ten jest spełniony, gdy  $F$  jest ciągła w punktach  $\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_r$ . Ustalmy wielkości

$$-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_s < x_{s+1} = +\infty \quad (7.2)$$

i zapiszmy zbiór  $A_x^d = \{x_0, x_1, \dots, x_{s+1}\} \cup \{\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_r\}$  w postaci  $A_x^d = \{v_0, v_1, \dots, v_{q+1}\}$ , gdzie

$$-\infty = v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_q < v_{q+1} = +\infty, \quad (7.3)$$

przy czym  $q = \text{card } A_x^d - 2$ .

Dla każdego wektora losowego  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  zdefiniujemy zmienne losowe

$$B_p \equiv B_p(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{v_p < X_j \leq v_{p+1}\}}, \quad p = 0, 1, \dots, q. \quad (7.4)$$

Aby uniknąć rozkładów zdegenerowanych, będziemy zakładać, że

$$F(v_{p+1}) - F(v_p) > 0 \quad \text{dla } p = 0, 1, \dots, q. \quad (7.5)$$

Łatwo spostrzec, że wektor losowy  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{X}) = (B_0, B_1, \dots, B_q)$  przyjmuje wartości w zbiorze

$$\sum_q[n] = \{(y_0, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{Z}_+^{q+1} : \sum_{p=0}^q y_p = n\}.$$

Niech  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$  będzie wektorem losowym o kopule  $C^*$  i identycznych jednowymiarowych rozkładach brzegowych o dystrybuancie  $F$ . Określmy zmienne losowe

$$Z_p = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{v_p < X_j^* \leq v_{p+1}\}}, \quad p = 0, 1, \dots, q,$$

oraz wektor losowy  $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1, \dots, Z_q)$ . Odnotujmy, że  $\mathbf{Z}$  przyjmuje wartości w zbiorze  $\sum_q[n]$  oraz że  $\mathbf{Z}$  ma rozkład wielomianowy, gdy  $r = 0$ .

Charakteryzację rodziny  $\mathcal{B}_k^*(F)$  wszystkich możliwych rozkładów wektora losowego  $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ , gdy  $\mathbf{X}$  jest dowolnym wektorem  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z dystrybuantą  $F$ , podaje następujące

**Twierdzenie 7.1** ([A7], Thm. 2.1). *Niech  $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_q)$  będzie dowolnym wektorem losowym o wartościach w  $\sum_q[n]$  i niech  $v_1, \dots, v_q$  będą takie jak w (7.5). Następujące warunki są równoważne.*

- (i) *Wektor losowy  $\mathbf{Y}$  ma taki sam rozkład jak wektor losowy  $\mathbf{B} = (B_0, B_1, \dots, B_q)$  związany zależnością opisaną przez (7.4) z pewnym wektorem  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$   $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o dystrybuancie  $F$ .*
- (ii) *Dla tych wszystkich  $i_0, i_1, \dots, i_q \in \mathbb{Z}_+$ , dla których  $i_0 + i_1 + \dots + i_q \leq k$ ,*

$$\mathbf{E}[Y_0^{i_0} Y_1^{i_1} \dots Y_q^{i_q}] = \mathbf{E}[Z_0^{i_0} Z_1^{i_1} \dots Z_q^{i_q}]. \quad (7.6)$$

(iii) Dla wszystkich  $i_0, i_1, \dots, i_q \in \mathbb{Z}_+$ , dla których  $i_0 + i_1 + \dots + i_q \leq k$ ,

$$\mathbf{E}\left[\prod_{p=0}^q Y_p(Y_p - 1) \dots (Y_p - i_p + 1)\right] = \mathbf{E}\left[\prod_{p=0}^q Z_p(Z_p - 1) \dots (Z_p - i_p + 1)\right].$$

Równoważność (ii) oraz (iii) jest konsekwencją definicji liczb Stirlinga pierwszego i drugiego rodzaju. Dowód implikacji (i)  $\Rightarrow$  (ii) sprowadza się do wykonania odpowiednich przekształceń algebraicznych. W dowodzie implikacji (iii)  $\Rightarrow$  (i) wykorzystano podejście Kempermana [47]: najpierw dla każdego  $\mathbf{Y}$  spełniającego (iii), skonstruowano miarę probabilistyczną  $Q$  na kostce  $(0, 1]^n$ , następnie pokazano, że teza (i) zachodzi dla pewnego wektora  $\mathbf{X}$  o rozkładzie  $Q$  w przypadku, gdy  $\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}$ , po czym udowodniono, że (i) zachodzi dla wszystkich  $\mathbf{Y}$  spełniających (iii).

Z twierdzenia 7.1 wynika, że wektor losowy  $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_q)$  ma taki sam rozkład jak wektor losowy  $\mathbf{B} = (B_0, B_1, \dots, B_q)$  związany zgodnie z (7.4) z pewnym  $C_k^*$ -zależnym wektorem losowym  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  o identycznych jednowymiarowych rozkładach brzegowych z dystrybuantą  $F$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{Y}$  przyjmuje wartości w  $\Sigma_q[n]$  i spełnia (7.6). Ponieważ rozkład  $\mathbf{Z}$  jest znany, mianowicie

$$\mathbf{P}(Z_0 = y_0, \dots, Z_q = y_q) = \binom{n}{y} Q^*((t_0, t_1]^{y_0} \times \dots \times (t_q, t_{q+1}]^{y_q}),$$

gdzie  $y = (y_0, \dots, y_q) \in \Sigma_q[n]$  i  $t_p = F(v_p)$ , ( $p = 0, 1, \dots, q$ ), więc dla dowolnej funkcji  $\psi$ , problem maksymalizacji (minimalizacji) wartości oczekiwanej  $\mathbf{E}\psi(\mathbf{B})$  przy ograniczeniu, że  $\mathbf{B}$  ma rozkład z  $\mathcal{B}_k^*(F)$ , redukuje się do problemu maksymalizacji (minimalizacji)  $\mathbf{E}\psi(\mathbf{Y})$  przy warunku, że  $\mathbf{Y}$  przyjmuje wartości w  $\Sigma_q[n]$  i spełnia (7.6).

Naszym celem staje się zatem maksymalizacja (minimalizacja) funkcjonału

$$T(\mathbf{X}) := \sum_{i=1}^n \lambda_i F_{i:n}(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}\left(\sum_{p=0}^{\kappa_l} B_p \geq i\right)$$

w klasie  $\mathcal{X}_k^*(F)$  wszystkich  $C_k^*$ -zależnych wektorów losowych  $\mathbf{X}$  o identycznych jednowymiarowych rozkładach brzegowych z dystrybuantą  $F$ , gdzie  $x$  i  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi,  $F_{i:n}(x) = \mathbf{P}(X_{i:n} \leq x)$ , zaś

$$\kappa_l = \sum_{i=1}^r \mathbf{1}_{[0, F(x))}(d_i).$$

Powyższy problem jest równoważny z problemem maksymalizacji (minimalizacji) funkcjonału

$$\tilde{T}(\mathbf{Y}^-) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}\left(\sum_{p=0}^{\kappa_l} Y_p \geq i\right),$$

przy ograniczeniu, że  $\mathbf{Y}^- = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{q-1})$  przyjmuje wartości w zbiorze

$$\Sigma_q^-[n] = \{(u_0, u_1, \dots, u_{q-1}) \in \mathbb{Z}_+^q : \sum_{p=0}^{q-1} u_p \leq n\} \quad (7.7)$$

i dla wszystkich  $i_0, \dots, i_{q-1} \in \mathbb{Z}_+$ , dla których  $\sum_{p=0}^{q-1} i_p \leq k$ , zachodzi równość

$$\mathbf{E}[Y_0^{i_0} Y_1^{i_1} \dots Y_{q-1}^{i_{q-1}}] = \mathbf{E}[Z_0^{i_0} Z_1^{i_1} \dots Z_{q-1}^{i_{q-1}}]. \quad (7.8)$$

Ostatni warunek może być zapisany w postaci

$$\mathbf{E}\Theta(\mathbf{Y}^-) = \mathbf{E}\Theta(\mathbf{Z}^-) =: \Theta^*(t_1, \dots, t_q), \quad (7.9)$$

gdzie  $\mathbf{Z}^- = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{q-1})$  i

$$\Theta(u) = (u^{\delta^1}, u^{\delta^2}, \dots, u^{\delta^\vartheta}),$$

przy czym  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{q-1}) \in \Sigma_q^-[n]$ , wielkości  $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^\vartheta$  to elementy zbioru

$$\Sigma_q^-[k] = \{(i_0, i_1, \dots, i_{q-1}) \in \mathbb{Z}_+^q : 0 < \sum_{p=0}^{q-1} i_p \leq k\},$$

zaś  $u^{\delta^j} = \prod_{p=0}^{q-1} u_p^{\delta_p^j}$  dla  $\delta^j = (\delta_0^j, \delta_1^j, \dots, \delta_{q-1}^j)$  i  $j \in [1; \vartheta]$ .

W pracy [A7] rozwiązano problem maksymalizacji i minimalizacji funkcjonau  $\tilde{T}$  określonego w (7.9), przy ograniczeniach na zbiór wartości (7.7) i na momenty (7.8) wektora  $\mathbf{Y}^-$ , wykorzystując podejście geometryczne. Idea tego podejścia polega na rozważeniu pomocniczej funkcji

$$\tilde{\Theta}(u) = (u^{\delta^1}, u^{\delta^2}, \dots, u^{\delta^\vartheta}, \hat{\Theta}(u)), \quad u = (u_0, u_1, \dots, u_{q-1}) \in \Sigma_q^-[n],$$

gdzie

$$\hat{\Theta}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{[i, \infty)} \left( \sum_{p=0}^{\kappa_i} u_p \right),$$

oraz na wyznaczeniu obwiedni zbioru wszystkich możliwych momentów  $\mathbf{E}\tilde{\Theta}(\mathbf{Y}^-) \in \mathbb{R}^{\vartheta+1}$ , gdy  $\mathbf{Y}^-$  ma dowolny taki rozkład na  $\Sigma_q^-[n]$ , że  $\mathbf{E}\Theta(\mathbf{Y}^-) = \mathbf{E}\Theta(\mathbf{Z}^-)$  (por. [60]). Punkto-  
wa osiągalność uzyskanych w ten sposób ograniczeń dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych z próby  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 7.1 (zob. również [A7, Rem. 4.2]).

Przed sformułowaniem twierdzenia o postaci osiągalnych ograniczeń dla  $T(\mathbf{X})$  oznaczmy przez  $\tilde{M}_k$  otoczkę wypukłą zbioru

$$\tilde{\Gamma}[n] = \{\tilde{\Theta}(u) : u \in \Sigma_q^-[n]\},$$

określmy zbiór

$$\Phi_k(t_1, \dots, t_q) = \tilde{M}_k \cap \{(\Theta^*(t_1, \dots, t_q), v) : v \in \mathbb{R}\}, \quad (7.10)$$

gdzie  $\Theta^*(t_1, \dots, t_q)$  dane jest wzorem (7.9), oraz przypomnijmy, że  $t_1, \dots, t_q$  to uporządkowane rosnąco elementy zbioru  $\{F(x), d_1, \dots, d_r\}$ .

**Twierdzenie 7.2** ([A7], Sect. 4). *Niech  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  i  $r \geq 0$  będą ustalonymi liczbami całkowitymi,  $x$  i  $\lambda_i$ , gdzie  $1 \leq i \leq n$ , będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi,  $d \in \mathcal{D}_r$  oraz  $Q^* \in \mathcal{Q}_d$ . Niech  $C^*$  oznacza kopułę rozkładu  $Q^*$ .*

(i) *Jeżeli  $X_1, \dots, X_n$  są  $C_k^*$ -zależnymi zmiennymi losowymi o dystrybuancie  $F$  spełniającej warunki (7.1) i (7.5), to*

$$\underline{\Phi}_k(t_1, \dots, t_q) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i F_{i:n}(x) \leq \overline{\Phi}_k(t_1, \dots, t_q), \quad (7.11)$$

gdzie

$$\underline{\Phi}_k(t_1, \dots, t_q) = \min \Phi'_k(t_1, \dots, t_q) \quad \text{i} \quad \overline{\Phi}_k(t_1, \dots, t_q) = \max \Phi'_k(t_1, \dots, t_q),$$

przy czym  $\Phi'_k(t_1, \dots, t_q)$  oznacza projekcję odcinka  $\Phi_k(t_1, \dots, t_q)$  określonego wzorem (7.10) na  $\mathbb{R}$  otrzymaną w wyniku pominięcia wszystkich współrzędnych oprócz ostatniej.

(ii) *Ponadto dla dowolnej dystrybuanty  $F$  spełniającej warunki (7.1) i (7.5), istnieją wymiennealne  $C_k^*$ -zależne zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  o dystrybuancie  $F$ , dla których w pierwszej (odpowiednio, drugiej) nierówności zachodzi równość.*

Kładąc  $d = (d_0, d_1)$ ,  $k = 2$  i  $\lambda_i = \mathbf{1}_{\{j\}}(i)$  w twierdzeniu 7.2, otrzymujemy ograniczenia Kempermana [47] dla dystrybuant pojedynczych statystyk porządkowych  $X_{j:n}$ . Warto podkreślić, że w proponowanym podejściu nie korzystamy ze – stanowiącej istotny element metody Kempermana – charakteryzacji tzw. stowarzyszonego rozkładu optymalnego (zob. [49]; por. [47]). Dla  $k = 1$ , czyli w przypadku dowolnie zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, ograniczenia (7.11) przyjmują postać odpowiadających im jednostajnie osiągalnych ograniczeń Lai'a i Robbinsa [51], Caraux i Gascuela [16] oraz Rychlika [82, 83]. Dla  $k > 1$  ograniczenia (7.11) na ogół nie są jednostajnie osiągalne (zob. [47, 56]; por. [A7, Rem. 4.3(ii)]).

Uzyskane wyniki mogą ułatwić ocenę niezawodności układów koherentnych, zbudowanych z identycznych elementów, gdy zależności pomiędzy czasami bezawaryjnej pracy elementów nie są w pełni znane (zob. [66]). W większości przypadków miar  $Q^*$  i współczynników  $\lambda_i$  wyznaczenie otoczek wypukłych zbiorów  $\Gamma[n]$  i  $\tilde{\Gamma}[n]$  wymaga zastosowania metod numerycznych (zob. np. [93]). Jawne postaci ograniczeń (7.11) – dla wybranych rodzin zależności, dystrybuant pojedynczych statystyk porządkowych oraz różnic dystrybuant dwóch kolejnych statystyk porządkowych – podano w [A7, Example 4.4 i 4.5].

Dalsza część tego rozdziału poświęcona będzie zaproponowanemu w [A8] rozszerzeniu modelu  $k$ -niezależności na przypadek wektorów losowych o znanych  $k$ -wymiarowych kopułach brzegowych typu mieszanego. Zaczniemy od skonstruowania na kostce jednostkowej  $(0, 1]^n$ , ( $n \in \{2, 3, \dots\}$ ), klasy wzorcowych rozkładów prawdopodobieństwa typu mieszanego o jednostajnych jednowymiarowych rozkładach brzegowych. Niech  $r \in \{0, 2, 4, \dots\}$  i  $\mathcal{D}_r^*$  oznacza zbiór wszystkich takich ciągów liczb rzeczywistych  $d_0, d_1, \dots, d_{r+1}$ , że  $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_r < d_{r+1} = 1$  oraz

$$d_{r-i+1} = 1 - d_i, \quad i \in [1; r]. \quad (7.12)$$

Niech  $d = (d_0, d_1, \dots, d_{r+1}) \in \mathcal{D}_r^*$ . Ciąg  $d$  wyznacza rozbitcie przedziału jednostkowego  $(0, 1]$  na  $r + 1$  rozłącznych przedziałów  $V_i = (d_i, d_{i+1}]$ ,  $i \in [0; r]$ . Rozbitcie to wyznacza rozbitcie kostki jednostkowej  $(0, 1]^n$  na  $(r + 1)^n$  prostopadłościennych bloków postaci

$$G(i_1, \dots, i_n) = V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n}, \quad (i_1, \dots, i_n) \in [0; r]^n. \quad (7.13)$$

Oznaczmy przez  $S_d^+$  rodzinę wszystkich bloków rozbitcia (7.13), których części wspólne z sumą  $D_n$  wszystkich przekątnych kostki  $(0, 1]^n$  mają dodatnie długości. Symbolem  $S_d^+(j)$ , ( $j \in [0; r/2]$ ), oznaczmy rodzinę wszystkich bloków z  $S_d^+$ , których pierwszą krawędzią jest  $V_j$  lub  $V_{r-j}$ . Łatwo spostrzec, że  $S_d^+ = \bigcup_{j=0}^{r/2} S_d^+(j)$ , przy czym zbiór  $S_d^+(r/2)$  składa się z jednego elementu – bloku  $V_{r/2}^n$ , zaś dla dowolnego  $j < r/2$ , zbiór  $S_d^+(j)$  składa się z  $2^n$  bloków postaci  $V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n}$ , gdzie  $(i_1, \dots, i_n) \in \{j, r-j\}^n$ .

Niech  $\lambda \in (0, 1]$  i  $\gamma \in \Gamma_r := \{(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{r/2}) : \gamma_j \in \{0, 1\}\}$ . Zdefiniujmy zbiory  $B_d^+(j) = \{V_j^n, V_{r-j}^n\}$  dla  $j \in [0; r/2]$  oraz wielkości  $\delta_i = d_{i+1} - d_i$  dla  $i \in [0; r]$ . Zauważmy, że zbiór  $B_d^+(j)$  składa się z tych wszystkich bloków z  $S_d^+(j)$ , których części wspólne z główną przekątną  $M_n$  kostki  $(0, 1]^n$  (tzn. odcinkiem łączącym punkty  $(0, 0, \dots, 0)$  i  $(1, 1, \dots, 1)$ ) mają dodatnie długości, oraz że wielkości  $\delta_i$  są dodatnie, sumują się do jedności i, na mocy (7.12),  $\delta_i = \delta_{r-i}$  dla  $i \in [0; r]$ . Dla dowolnego  $j < r/2$ , przyporządkujmy każdemu blokowi  $G \in S_d^+(j)$  masę równą  $\lambda \delta_j$ , jeśli  $G \in B_d^+(j)$  lub masę równą  $(1 - \lambda) \delta_j / (2^{n-1} - 1)$ , jeśli  $G \notin B_d^+(j)$ , i rozłóżmy ją albo równomiernie na  $G$ , gdy  $\gamma_j = 1$ , albo równomiernie na  $G \cap D_n$ , gdy  $\gamma_j = 0$ , natomiast dla  $j = r/2$ , jednemu blokowi  $G = V_{r/2}^n \in S_d^+(r/2)$  przyporządkujmy masę równą  $\delta_{r/2}$  i albo rozłóżmy ją równomiernie na  $G$ , gdy  $\gamma_{r/2} = 1$ , albo rozłóżmy jej części równe odpowiednio  $\lambda \delta_{r/2}$  i  $(1 - \lambda) \delta_{r/2}$  równomiernie na odpowiednio

$G \cap M_n$  i  $G \cap (D_n \setminus M_n)$ , gdy  $\gamma_{r/2} = 0$ . Otrzymana w ten sposób miara

$$Q^* = Q^*(d, \lambda, \gamma)$$

na kostce  $(0, 1]^n$  jest wymiennalną miarą probabilistyczną o jednostajnych jednowymiarowych rozkładach brzegowych.

Zauważmy, że dla  $r = 0$  i  $\gamma_0 = 1$  otrzymujemy rozkład jednostajny na kostce  $(0, 1]^n$  stowarzyszony z  $n$ -kopułą niezależności. Odnotujmy, że dla  $r = 0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  i  $\gamma_0 = 0$  dostajemy mieszankę rozkładów jednostajnych na przekątnych kostki  $(0, 1]^n$ , tzn. mieszankę wielowymiarowych rozkładów ekstremalnych (zob. [96]). Z kolei dla  $r = 0$ ,  $\lambda = 1$  i  $\gamma_0 = 0$  uzyskujemy rozkład stowarzyszony z  $n$ -kopułą komonotoniczności, natomiast dla  $r \geq 2$ ,  $\lambda = 1$  i  $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{r/2}) \in \Gamma_r$  takich, że  $\sum_{j=0}^{r/2} \gamma_j \geq 1$  – rozkład stowarzyszony z sumą porządkową  $C_{\text{ord}}$  odpowiadającą rozbiciu  $\mathcal{V}_r = (V_0, \dots, V_r)$  i ciągowi kopuł  $\mathcal{C}_\gamma = (C_{\gamma_0}, C_{\gamma_1}, \dots, C_{\gamma_{r/2}}, C_{\gamma_{r/2-1}}, \dots, C_{\gamma_0})$ , przy czym  $C_0$  oznacza  $n$ -kopułę komonotoniczności, a  $C_1$  –  $n$ -kopułę niezależności (por. [23]). Ponadto dla  $r \geq 2$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  i  $\gamma \in \Gamma_r$  otrzymujemy rozkład stowarzyszony z mieszanką kopuł rzadkich odpowiadających rozbiciu  $\mathcal{V}_r$  i ciągowi  $\mathcal{C}_\gamma$ , gdzie  $C_0$  i  $C_1$  oznaczają, odpowiednio,  $n$ -kopułę rozkładu ekstremalnego i  $n$ -kopułę niezależności (zob. [23]). Przykład 2.2 z pracy [A8] pokazuje, że nieregularny układ rozkładów brzegowych  $\mathcal{Q}_k(Q^*(d, \lambda, \gamma))$  jest nietrywialny, chyba że  $\lambda = 1$  i  $\gamma = (0, 0, \dots, 0)$ .

Ustalmy  $r \in \{0, 2, 4, \dots\}$ ,  $d = (d_0, \dots, d_{r+1}) \in \mathcal{D}_r^*$ ,  $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{r/2}) \in \Gamma_r$  oraz  $\lambda \in (0, 1]$  takie, że  $\lambda \in (0, 1)$  lub  $\gamma \neq (0, 0, \dots, 0)$ . Niech  $n \geq 2$  i  $k \in [1; n]$  będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Niech  $F$  będzie daną dystrybuantą spełniającą warunek (7.1) i niech  $x_0, x_1, \dots, x_{s+1}$  będą takimi ustalonymi wielkościami spełniającymi warunek (7.2), że

$$F(x_{s-\ell+1}) = 1 - F(x_\ell) \quad \text{dla} \quad \ell = 1, 2, \dots, s. \quad (7.14)$$

W pracy [A8, Thm. 3.1 i Prop. 4.1] udowodniono, że przy powyższych założeniach twierdzenia 7.1 i 7.2 pozostają prawdziwe dla modelu  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych w przypadku, gdy  $C^*$  jest kopułą stowarzyszoną z rozkładem  $Q^* = Q^*(d, \lambda, \gamma)$ . Jawną postać osiągalnych ograniczeń dla pojedynczych statystyk porządkowych z 2-zależnych prób typu mieszanego podano w [A8, Example 4.3].

## 8. Przekątniowa zależność

W rozdziale tym omówimy wyniki pracy [A9]. Zaczniemy od wprowadzenia pojęcia przekątniowej zależności. Niech  $Q^*$  będzie dowolnym ustalonym łącznym rozkładem  $n$  wymiennalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jednostajnym na  $(0, 1]$ . Ustalmy liczby naturalne  $1 \leq k \leq n$  i  $n \geq 2$  oraz dystrybuantę  $F$  na  $\mathbb{R}$ . Określmy zbiory  $I_0(u) = [0, u]$  i  $I_1(u) = (u, 1]$  dla  $u \in [0, 1]$  oraz  $J_0(x) = (-\infty, x]$  i  $J_1(x) = (x, \infty)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Oznaczmy przez  $C^*$  kopułę rozkładu  $Q^*$ , zaś przez  $C_\ell^*$  – kopułę  $\ell$ -wymiarowego rozkładu brzegowego  $Q_\ell^*$  rozkładu  $Q^*$ . Przyjmijmy dodatkowo, że  $Q_n^* = Q^*$ ,  $C_n^* = C^*$  i  $C_1^*(u) = u$  dla  $u \in [0, 1]$ .

**Definicja 3** ([A9], Sect. 2). Mówimy, że  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  jest wektorem przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z dystrybuantą  $F$  lub że wektor  $\mathbf{X}$  o jednowymiarowych rozkładach brzegowych z dystrybuantą  $F$  jest przekątniowo  $C_k^*$ -zależny, gdy

$$\mathbf{P}(X_{j_1} \in J_{s_1}(x), \dots, X_{j_i} \in J_{s_i}(x)) = Q_i^*(I_{s_1}(F(x)) \times \dots \times I_{s_i}(F(x))) \quad (8.1)$$

dla wszystkich  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n$ ,  $s_1, \dots, s_i \in \{0, 1\}$  i  $x \in \mathbb{R}$ .

Pojęcie przekątniowej zależności ma naturalną interpretację w teorii niezawodności, mianowicie każdy układ złożony z  $n$  elementów, których czasy bezawaryjnej pracy są przekątniowo  $C_k^*$ -zależnymi zmiennymi losowymi ma tę własność, że dla dowolnego  $i \leq k$  wszystkie jego  $i$ -elementowe podukłady o identycznej strukturze (np. wszystkie  $i$ -elementowe podukłady szeregowe) mają tę samą znaną niezawodność (por. [9]).

Zauważmy, że kładąc  $k = 1$  w (8.1), otrzymujemy dowolnie zależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie z dystrybuantą  $F$ . Odnotujmy również, że jeśli  $\mathbf{X}$  jest wektorem przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych, to  $\mathbf{X}$  jest maksymalnie i minimalnie stabilny dowolnego rzędu nieprzekraczającego  $k$  (por. [71]).

Wprowadźmy następującą definicję:

**Definicja 4.** Niech  $k \in [1; n]$ . Powiemy, że wektor losowy  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  ma własność przekątniowej zależności rzędu  $k$ , gdy  $\mathbf{P}(X_{j_1} \leq x, \dots, X_{j_i} \leq x) = \delta_i(F(x))$  dla wszystkich  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n$  i  $x \in \mathbb{R}$ , gdzie  $\delta_i$  jest przekątną  $i$ -wymiarowej kopuły brzegowej pewnej wymiennej  $n$ -kopuły,  $F$  jest dystrybuantą na  $\mathbb{R}$ , zaś  $\delta_1(u) = u$  dla  $u \in [0, 1]$ .

Można udowodnić, że  $\mathbf{X}$  ma własność przekątniowej zależności rzędu  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{X}$  jest wektorem przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, gdzie  $C_k^*$  jest  $k$ -wymiarową kopułą brzegową pewnej wymiennej  $n$ -kopuły (zob. [A9, Rem. 2.2(iii)]).

Przedstawimy teraz ideę zaproponowanej w pracy [A9] metody wyznaczania jednostajnie osiągalnych ograniczeń dla kombinacji liniowych dystrybuant statystyk porządkowych z prób przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze znaną dystrybuantą  $F$ . Podstawę tej metody stanowi charakteryzacja rodzin rozkładów jednowymiarowych dystrybuanty empirycznej dla przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych obserwacji.

Zdefiniujmy zmienne losowe

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j^* \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$  jest wektorem losowym o kopule  $C^*$  i jednowymiarowych rozkładach brzegowych z dystrybuantą  $F$ .

Korzystając z twierdzenia 3.1, uzyskano następującą charakteryzację:

**Twierdzenie 8.1** ([A9], Thm. 2.1). *Niech  $\mathbb{Y} = \{Y(x) : x \in \mathbb{R}\}$  będzie procesem stochastycznym o wartościach w  $[0; n]$ . Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Istnieje taki wektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  wymiennej, przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o tej samej dystrybuancie  $F$ , że*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Y(x) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}}.$$

- (ii) *Funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{P}(Y(x) \geq j)$  jest dystrybuantą dla każdego  $j \in [1; n]$  oraz dla wszystkich  $i \leq k$*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbf{E}Y^i(x) = \mathbf{E}Z^i(x). \quad (8.2)$$

*Uwaga 5.* Twierdzenie 8.1 jest uogólnieniem twierdzenia 3.1 na przypadek  $k \geq 2$ . Przykłady procesów stochastycznych spełniających – dla nietrywialnych struktur zależności – założenia twierdzenia 8.1(ii), zostały podane w dowodach stwierdzeń [A9, Prop. 3.3 i 3.7] (zob. również [A9, Rem. 3.4(ii) i 3.8]).



Zdefiniujmy pomocnicze zmienne losowe

$$B(x) \equiv B(x, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}} \quad (8.3)$$

dla  $x \in \mathbb{R}$  oraz  $n$ -wymiarowych wektorów losowych  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . Na mocy twierdzenia 8.1, proces stochastyczny  $\mathbb{Y} = \{Y(x) : x \in \mathbb{R}\}$  ma takie same rozkłady jednowymiarowe jak proces stochastyczny  $\mathbb{B} = \{B(x) : x \in \mathbb{R}\}$  związany zależnością (8.3) z pewnym wektorem  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych o dystrybucji  $F$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbb{Y}$  przyjmuje wartości w  $[0; n]$ , spełnia warunek (8.2) oraz funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{P}(Y(x) \geq j)$  jest dystrybuantą dla każdego  $j \in [1; n]$ . Oznacza to, że dla dowolnej funkcji  $\psi$ , górne (dolne) ograniczenie na  $\mathbf{E}[\psi(B(x, \mathbf{X}))]$  w klasie przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych wektorów  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  o jednowymiarowych dystrybucjach brzegowych  $F$  można wyznaczyć maksymalizując (minimalizując)  $\mathbf{E}[\psi(Y(x))]$  przy warunku, że  $Y(x)$  przyjmuje wartości w  $[0; n]$  i spełnia (8.2). Uzyskane w ten sposób ograniczenie jest jednostajnie osiągalne, tzn. osiągalne dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego  $\mathbb{Y}$ , dla którego osiągalne jest maksimum (minimum), funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{P}(Y(x) \geq j)$  jest dystrybuantą dla każdego  $j \in [1; n]$ .

Aby w klasie przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych obserwacji o tym samym rozkładzie wyznaczyć postać górnych i dolnych ograniczeń dla

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j F_{j;n}(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{P}(B(x) \geq j),$$

gdzie  $x \in \mathbb{R}$  oraz  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, wystarczy rozwiązać problem maksymalizacji (minimalizacji)  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{P}(Y(x) \geq j)$  przy ograniczeniu, że  $Y(x)$  przyjmuje wartości w  $[0; n]$  i spełnia (8.2). Można to zrobić metodą geometryczną opisaną w poprzednim rozdziale. Oznaczmy przez  $M_k$  i  $\widetilde{M}_k$  otoczki wypukłe zbiorów, odpowiednio,  $\Gamma[n] = \{\Theta(u) : u \in [0; n]\}$  i  $\widetilde{\Gamma}[n] = \{\widetilde{\Theta}(u) : u \in [0; n]\}$ , gdzie  $\Theta(u) = (u, u^2, \dots, u^k)$ ,  $\widetilde{\Theta}(u) = (u, u^2, \dots, u^k, \widehat{\Theta}(u))$ , zaś  $\widehat{\Theta}(u) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1}_{(-\infty, u]}(j)$ . Określmy wielkości

$$\Phi_k^0(F(x)) = \min \Phi'_k(F(x)) \quad \text{i} \quad \Phi_k^1(F(x)) = \max \Phi'_k(F(x)),$$

gdzie  $\Phi'_k(F(x))$  jest projekcją zbioru

$$\Phi_k(F(x)) = \widetilde{M}_k \cap \{(\Theta^*(F(x)), a) : a \in \mathbb{R}\}$$

na  $\mathbb{R}$  uzyskaną przez pominięcie wszystkich współrzędnych z wyjątkiem ostatniej, przy czym  $\Theta^*(F(x)) := \mathbf{E}[\Theta(Z(x))]$ . Wówczas

$$\Phi_k^0(F(x)) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j F_{j;n}(x) \leq \Phi_k^1(F(x)). \quad (8.4)$$

Na mocy twierdzenia 8.1, ograniczenie  $\Phi_k^\theta(F(x))$ , gdzie  $\theta \in \{0, 1\}$ , jest jednostajnie osiągalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki proces stochastyczny o wartościach w  $[0; n]$ , że  $\mathbf{E}\Theta(Y(x)) = \mathbf{E}\Theta(Z(x))$  i  $\mathbf{E}\widehat{\Theta}(Y(x)) = \Phi_k^\theta(F(x))$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ . Naszym celem staje się zatem określenie warunków koniecznych i wystarczających istnienia takiego procesu.

Oznaczmy przez  $\widetilde{\mathcal{F}}_k^1$  (odpowiednio,  $\widetilde{\mathcal{F}}_k^0$ ) rodzinę wszystkich  $k$ -wymiarowych ścian  $(k+1)$ -wymiarowego wielotopu  $\widetilde{M}_k$ , wyznaczających hiperpłaszczyzny leżące, względem ostatniej współrzędnej, powyżej (odpowiednio, poniżej) wnętrza  $\text{int}(\widetilde{M}_k)$ , gdy  $\text{int}(\widetilde{M}_k) \neq \emptyset$ , i przyjmijmy, że  $\widetilde{\mathcal{F}}_k^1 = \widetilde{\mathcal{F}}_k^0 = \widetilde{M}_k$ , gdy  $\text{int}(\widetilde{M}_k) = \emptyset$ . Sumę wszystkich zbiorów z  $\widetilde{\mathcal{F}}_k^1$  (odpowiednio,  $\widetilde{\mathcal{F}}_k^0$ ) oznaczmy symbolem  $\text{uenv}(\widetilde{M}_k)$  (odpowiednio,  $\text{lenv}(\widetilde{M}_k)$ ) i nazwijmy obwiednią górną (odpowiednio, obwiednią dolną) zbioru  $\widetilde{M}_k$ . Odnotujmy, że rodzina  $\mathcal{D}_k^1$

(odpowiednio,  $\mathcal{D}_k^0$ ) projekcji wszystkich wielotopów z  $\tilde{\mathcal{F}}_k^1$  (odpowiednio,  $\tilde{\mathcal{F}}_k^0$ ) na  $M_k$  stanowi podział  $M_k$ .

Niech  $\mathcal{D}_k \in \{\mathcal{D}_k^0, \mathcal{D}_k^1\}$  i niech  $\Theta^*(t) = \Theta^*(t/n)$  dla  $t \in [0, n]$ . Przypuśćmy, że

(P1) części wspólne krzywej  $\Theta^*$  i wewnątrz wszystkich  $k$ -wielotopów z  $\mathcal{D}_k$  są zbiorami spójnymi.

Położmy  $t_0 = 0$ . Oznaczmy przez  $P_m = P_m(v_1^{(m)}, \dots, v_{r_m}^{(m)})$ , gdzie  $v_\ell^{(m)} = (v_{\ell,1}^{(m)}, \dots, v_{\ell,k}^{(m)})$  i  $v_{\ell,i}^{(m)} = (v_{\ell,1}^{(m)})^i$ ,  $k$ -wielotop z  $\mathcal{D}_k$ , którego przecięcie ze spójną częścią  $\Theta^*$  zawierającą punkt  $\Theta^*(t_{m-1})$  ma największą długość, oraz określmy  $t_m = \max\{t > t_{m-1} : \Theta^*(t) \in P_m\}$ , gdzie  $m \in [1; n^*]$ , przy czym  $n^*$  to liczba wszystkich takich  $k$ -wielotopów, zaś  $r_m$  – liczba wierzchołków  $P_m$ .

Niech  $\mathbb{Y} = \{Y(x) : x \in \mathbb{R}\}$  będzie takim procesem stochastycznym, że dla wszystkich  $m \in [1; n^*]$

$$\forall_{x \in F^{-1}([t_{m-1}/n, t_m/n])} \mathbf{P}(Y(x) = v_{\ell,1}^{(m)}) = p_\ell^{(m)}(x), \quad (8.5)$$

gdzie  $(p_1^{(m)}(x), \dots, p_{r_m}^{(m)}(x))$  jest jakimś rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\mathbf{E}Y^i(x) = \mathbf{E}Z^i(x) =: \Theta_i^*(F(x)), \quad i = 1, \dots, k. \quad (8.6)$$

W artykule [A9] wykazano, że jeżeli

(P2) dla pewnego procesu stochastycznego  $\{Y(x) : x \in \mathbb{R}\}$  spełniającego warunki (8.5)–(8.6), funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{P}(Y(x) \geq j)$  jest dystrybuantą dla każdego  $j \in [1; n]$ ,

to  $\mathbf{E}[\hat{\Theta}(Y(x))] = \Phi_k^\theta(F(x))$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ , gdzie  $\theta = 0$  dla  $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k^0$  i  $\theta = 1$  dla  $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k^1$ . Na mocy twierdzenia 8.1, ograniczenia (8.4) są jednostajnie osiągalne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (P1)–(P2). Łącząc powyższe z faktem, że (P1) jest warunkiem koniecznym dla zachodzenia (P2), otrzymujemy następujące

**Twierdzenie 8.2** ([A9], Thm. 3.1). *Niech  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  będą dowolnymi ustalonymi liczbami rzeczywistymi.*

- (i) *Jeżeli  $X_1, \dots, X_n$  są przekątniowo  $C_k^*$ -zależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z dystrybuantą  $F$ , to nierówności (8.4) są spełnione dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .*
- (ii) *Ponadto dla dowolnej dystrybuanty  $F$ , warunki (P1)–(P2) są warunkami koniecznymi i wystarczającymi istnienia wymienialnych, przekątniowo  $C_k^*$ -zależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$  o dystrybuancie  $F$ , dla których równość w pierwszej (odpowiednio, drugiej) nierówności w (8.4) jest osiągalna dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Uwaga 6.* Kładąc  $k = 1$  w twierdzeniu 8.2, otrzymujemy jednostajnie osiągalne oszacowania Rychlika [83] dla prób dowolnie zależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.

Korzystając z twierdzenia 8.2, można wyznaczyć – dla pewnych klas przekątniowo 2-zależnych zmiennych losowych – jawną postać stochastycznie ekstremalnych rozkładów pojedynczych statystyk porządkowych. Niech  $k = 2$ ,  $n \geq 3$ ,  $F$  będzie dystrybuantą na  $\mathbb{R}$  oraz  $C^*$  będzie taką kopułą wymienialną, że przekątna  $\delta_2$  kopuły  $C_2^*$  jest funkcją wypukłą. Jeśli istnieje lewostronna (odpowiednio, prawostronna) pochodna pewnej funkcji  $g$ , będziemy oznaczać ją symbolem  $g^-$  (odpowiednio,  $g^+$ ). Zdefiniujmy funkcjonały

$$r_1(\delta_2) = \max\left\{r \in [1; n-1] : \frac{r-1}{n-1} \leq \delta_2^+(0)\right\}$$

oraz  $r_s(\delta_2) = \min\{r_1(\delta_2), s - 1\}$  dla  $s \in [2; n]$ . Określmy wielkości  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_n = n + 1$  oraz

$$\tau_r(\delta_2) = \max\{t > 0: (n - 1)n\delta_2(t/n) = rt\}$$

dla  $r \in \{1, \dots, n - 1\}$ , przy czym  $\max \emptyset = 0$ . Aby skrócić zapis, będziemy pisać  $r_1$ ,  $r_s$  i  $\tau_r$  zamiast  $r_1(\delta_2)$ ,  $r_s(\delta_2)$  i  $\tau_r(\delta_2)$ .

Postać stochastycznie maksymalnych rozkładów statystyk porządkowych z przekątniowo  $C_2^*$ -zależnych zmiennych losowych o dystrybuancie  $F$  podaje następujące

**Twierdzenie 8.3** ([A9], Prop. 3.3). (i) Niech  $s \in [2; n]$ . Jeżeli  $\delta_2^-(1) \leq (n + s - 2)/(n - 1)$  oraz

$$(C1) \quad \delta_2^-(\tau_r/n) \leq 2r/(n - 1) \quad \text{dla } r \in [r_s; s - 2],$$

to dla każdego  $x \in \mathbb{R}$

$$F_{s:n}(x) \geq \frac{(n - 1)\delta_2(F(x)) - (s - 2)F(x)}{n - s + 1} \mathbf{1}_{[\tau_{s-2}, \infty)}(nF(x)). \quad (8.7)$$

Ponadto istnieją przekątniowo  $C_k^*$ -zależne zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  o dystrybuancie  $F$ , dla których równość w nierówności (8.7) jest osiągnięta dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) Jeżeli warunek (C1) jest spełniony dla wszystkich  $r \in [r_1; n - 2]$ , to dla każdego  $x \in \mathbb{R}$

$$F_{1:n}(x) \geq \sum_{r=r_1}^n \frac{2rnF(x) - n(n - 1)\delta_2(F(x))}{r(r + 1)} \mathbf{1}_{[\tau_{r-1}, \tau_r)}(nF(x)). \quad (8.8)$$

Równość w nierówności (8.8) jest jednostajnie osiągalna.

*Uwaga 7.* Niech  $C^* = \alpha\Pi + (1 - \alpha)C^0$ , gdzie  $\alpha \in (0, 1]$ , natomiast  $\Pi$  i  $C^0$  są odpowiednio  $n$ -kopolą niezależności i  $n$ -kopolą komonotoniczności. Wówczas dla dowolnego  $s \in [1; n]$ , warunek (C1) z twierdzenia 8.3 zachodzi dla wszystkich  $\alpha \in (0, 1]$ , zaś dla dowolnego  $s \in [2; n]$ , warunek  $\delta_2^-(1) \leq (n + s - 2)/(n - 1)$  jest spełniony dla wszystkich  $\alpha \leq (s - 1)/(n - 1)$ .

Jako wniosek z twierdzenia 8.3 można otrzymać postać stochastycznie minimalnych rozkładów statystyk porządkowych z przekątniowo  $C_2^*$ -zależnych zmiennych losowych. Niech  $\bar{Q}^*$  będzie taką miarą borelowską na kostce  $(0, 1]^n$ , że  $\bar{Q}^*((0, u_1] \times \dots \times (0, u_n]) = Q^*((1 - u_1, 1] \times \dots \times (1 - u_n, 1])$  dla  $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$ . Oznaczmy przez  $\bar{\delta}_2$  przekątną kopolę  $\bar{C}_2^*$  dwuwymiarowych rozkładów brzegowych  $\bar{Q}^*$ . Określmy wielkości  $\bar{F} = 1 - F$ ,  $\bar{r}_s = r_s(\bar{\delta}_2)$  dla  $s \in [1; n]$ ,  $\bar{\tau}_r = \tau_r(\bar{\delta}_2)$  dla  $r \in [1; n - 1]$ ,  $\bar{\tau}_0 = \tau_0$  oraz  $\bar{\tau}_n = \tau_n$ .

**Wniosek 8.4** ([A9], Cor. 3.5). (i) Niech  $s \in [1; n - 1]$ . Jeżeli  $\bar{\delta}_2^-(1) \leq (2n - s - 1)/(n - 1)$  oraz

$$(C2) \quad \bar{\delta}_2^-(\bar{\tau}_r/n) \leq 2r/(n - 1) \quad \text{dla } r \in [\bar{r}_{n-s+1}; n - s - 1],$$

to dla każdego  $x \in \mathbb{R}$

$$F_{s:n}(x) \leq 1 - \frac{(n - 1)\bar{\delta}_2(\bar{F}(x)) - (n - s - 1)\bar{F}(x)}{s} \mathbf{1}_{[\bar{\tau}_{n-s-1}, \infty)}(n\bar{F}(x)), \quad (8.9)$$

przy czym równość w nierówności (8.9) jest jednostajnie osiągalna.

(ii) Jeżeli warunek (C2) jest spełniony dla wszystkich  $r \in [\bar{r}_1; n - 2]$ , to dla każdego  $x \in \mathbb{R}$

$$F_{n:n}(x) \leq 1 - \sum_{r=\bar{r}_1}^n \frac{2rn\bar{F}(x) - n(n - 1)\bar{\delta}_2(\bar{F}(x))}{r(r + 1)} \mathbf{1}_{[\bar{\tau}_{r-1}, \bar{\tau}_r)}(n\bar{F}(x)) \quad (8.10)$$

i równość w nierówności (8.10) jest jednostajnie osiągalna.

Zauważmy, że kładąc  $\delta_2(u) = u^2$  we wniosku 8.4 (ii), otrzymamy ograniczenia Kempermana [47] dla parami niezależnych zmiennych losowych.

Na zakończenie tego rozdziału zaprezentujemy jednostajnie osiągalne ograniczenia dla kombinacji linowych dystrybuant statystyk porządkowych z pewnej klasy przekątniowo 2-zależnych obserwacji, znacznie bardziej restrykcyjnej niż klasy rozważane w twierdzeniu 8.3 i wniosku 8.4. Symbolem  $\Delta(u_1, u_2, u_3)$  będziemy oznaczać trójkąt w wierzchołkach w punktach  $\Theta(u_1)$ ,  $\Theta(u_2)$  i  $\Theta(u_3)$ , gdzie  $u_1, u_2, u_3 \in [0; n]$  są takie, że  $u_j \neq u_l$  dla  $j \neq l$ .

**Twierdzenie 8.5** ([A9], Prop. 3.7). *Jeżeli  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_2^+(0) \geq (n-2)/(n-1)$  oraz  $\delta_2^-(1) \leq n/(n-1)$ , to dla każdego  $x \in \mathbb{R}$*

$$\Phi_2^0(F(x)) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j F_{j:n}(x) \leq \Phi_2^1(F(x)), \quad (8.11)$$

gdzie

$$\Phi_2^\theta(u) = \frac{((n-1)n\lambda^{[m_\theta]} - (m_\theta - 1)m_\theta\lambda^{[n]})u - (n-1)(n\lambda^{[m_\theta]} - m_\theta\lambda^{[n]})\delta_2(u)}{(n - m_\theta)m_\theta}$$

dla  $u \in [0, 1]$  i  $\theta \in \{0, 1\}$ , przy czym  $\lambda^{[m]} = \sum_{j=1}^m \lambda_j$ , natomiast  $m_\theta \in [1; n-1]$  jest takie, że  $\Delta(0, 1, n) \cap \Delta(0, n-1, n) \subset \Delta(0, m_\theta, n) \in \mathcal{D}_2^\theta$ . Ograniczenia (8.11) są jednostajnie osiągalne.

Odnotujmy, że założenia twierdzenia 8.5 dotyczące  $\delta_2$  są spełnione, np. dla kopuły  $C^*$  z uwagi 7(ii), gdy  $\alpha \in (0, 1/(n-1)]$ .

Z twierdzenia 8.5 wynika następujący

**Wniosek 8.6** ([A9], Cor. 3.9). *Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 8.5, to*

$$\int_0^1 F^{-1}(u) d\Phi_2^1(u) \leq \mathbf{E} \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{j:n} \right) \leq \int_0^1 F^{-1}(u) d\Phi_2^0(u) \quad (8.12)$$

o ile całki występujące w (8.12) istnieją i są skończone. Dolne i górne ograniczenie w (8.12) jest osiągalne, tzn. dla dowolnej dystrybuanty  $F$ , dla której całki występujące w (8.12) istnieją i są skończone, istnieją wymienne, przekątniowo  $C_2^*$ -zależne zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  o dystrybuancie  $F$ , dla których osiągnięta jest równość w pierwszej (drugiej) nierówności.

Korzystając z twierdzenia 8.3 i wniosku 8.4, można otrzymać osiągalne odpowiedniki ograniczeń (8.12) dla  $\mathbf{E}X_{s:n}$ . Tego typu nierówności mogą stanowić punkt wyjścia do wyznaczania nowych ograniczeń dla wartości oczekiwanych statystyk porządkowych i  $L$ -statystyk z prób przekątniowo zależnych obserwacji (zob. np. [84] i [28]; por. twierdzenie 5.4). W teorii niezawodności takie oszacowania dostarczają informacji o przeciętnych czasach bezawaryjnej pracy układów  $(n-k+1)$ -spółród- $n$  lub układów koherentnych w przypadku, gdy łączne rozkłady czasów bezawaryjnej pracy elementów układu nie są w pełni znane.

## Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo–badawczych

Moje pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze stanowią 24 artykuły naukowe.

### Prace opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora

- [B1] L. GAJEK, A. OKOLEWSKI, *Steffensen type inequalities for order and record statistics*, Annales UMCS, Vol. LI (1997), 41–59.
- [B2] L. GAJEK, A. OKOLEWSKI, *Sharp bounds on moments of generalized order statistics*, Metrika 52 (2000), 27–43.

### Prace opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora

- [C1] L. GAJEK, A. OKOLEWSKI, *Improved Steffensen type bounds on generalized moments of record statistics*, Statist. Probab. Lett. 55 (2001), 205–212.
- [C2] L. GAJEK, A. OKOLEWSKI, *Sharp bounds on quasiconvex moments of generalized order statistics*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 2 (2001), Article 6.
- [C3] L. GAJEK, A. OKOLEWSKI *Inequalities for generalized order statistics from some restricted family of distributions*, Comm. Statist. Theory Methods 29 (2001), 2427–2438.
- [C4] A. OKOLEWSKI, T. RYCHLIK, *Sharp distribution-free bounds on the bias in estimating quantiles via order statistics*, Statist. Probab. Lett. 52 (2001), 207–213.
- [C5] L. GAJEK, A. OKOLEWSKI, *Projection bounds on expectations of record statistics from restricted families*, J. Statist. Plann. Inference 110 (2003), 97–108.
- [C6] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *Sharp exponential and entropy bounds on expectations of generalized order statistics*, Metrika 58 (2003), 159–171.
- [C7] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *Tsallis’ entropy bounds for generalized order statistics*, Probab. Math. Statist. 4 (2004), 253–262.
- [C8] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *On Fatou-type lemma for monotone moments of weakly convergent random variables*, Statist. Probab. Lett. 66 (2004), 45–50.
- [C9] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *Sharp bounds for generalized order statistics via logarithmic moments*, Comm. Statist. Theory Methods 34 (2005), 1911–1923.
- [C10] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *An extension of Arrow’s result on optimal reinsurance*, J. Risk and Insurance 75 (2008), 275–288.
- [C11] A. OKOLEWSKI, M. KALUSZKA, *Bounds for expectations of concomitants*, Statist. Papers 49 (2008), 603–618.
- [C12] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *A note on order statistics from symmetrically distributed samples*, Appl. Math. 38 (2011), 477–483.
- [C13] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *Stability of L-statistics from weakly dependent observations*, Statist. Probab. Lett. 81 (2011), 618–625.
- [C14] M. KALUSZKA, R. J. A. LAEVEN, A. OKOLEWSKI, *A note on weighted premium calculation principles*, Insurance Math. Econom. 51 (2012), 379–381.
- [C15] W. SERWETA, A. OKOLEWSKI, B. BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA, K. CZOLCZYNSKI, T. KAPITANIAK, *Lyapunov exponents of impact oscillators with Hertz’s and Newton’s contact models*, Int. J. Mech. Sci. 89 (2014), 194–206.
- [C16] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, M. BOCZEK, *On Chebyshev type inequalities for generalized Sugeno integrals*, Fuzzy Sets Syst. 244 (2014), 51–62.
- [C17] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, M. BOCZEK, *On the Jensen type inequality for generalized Sugeno integral*, Inform. Sci. 266 (2014), 140–147.
- [C18] M. KALUSZKA, A. OKOLEWSKI, *A note on multiple life premiums for dependent lifetimes*, Insurance Math. Econom. 57 (2014), 25–30.
- [C19] W. SERWETA, A. OKOLEWSKI, B. BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA, K. CZOLCZYNSKI, T. KAPITANIAK, *Mirror hysteresis and Lyapunov exponents of impact oscillator with symmetrical soft stops*, Int. J. Mech. Sci. 101-102 (2015), 89–98.
- [C20] K. CZOLCZYNSKI, B. BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA, A. OKOLEWSKI, *Analytical and numerical investigations of stable periodic solutions of the impacting oscillator with a moving base*, Int. J. Mech. Sci. 115 (2016), 325–338.

- [C21] B. BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA, K. CZOLCZYNSKI, A. OKOLEWSKI, *Analytical and numerical investigations of stable periodic solutions of the impacting oscillator with a moving base and two fenders*, J. Comput. Nonlinear Dynam. 12 (2017), 061008-061008-11 (11 pages).
- [C22] K. CZOLCZYNSKI, A. OKOLEWSKI, B. BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA, *Lyapunov exponents in discrete modelling of a cantilever beam impacting on a moving base*, Int. J. Non-Linear Mech. 88 (2017), 74–84.

Powyższe artykuły są poświęcone pięciu następującym tematom badawczym:

1. oszacowania funkcjonałów uporządkowanych zmiennych losowych ([B1], [B2], [C1]-[C7], [C9], [C11]-[C13]);
2. lemat Fatou dla słabej zbieżności ([C8]);
3. matematyka ubezpieczeniowa ([C10], [C14], [C18]);
4. dynamika układów mechanicznych ze zderzeniami ([C15], [C19]-[C22]);
5. nierówności dla całek względem miar nieaddytywnych ([C16], [C17]).

**1. Oszacowania funkcjonałów uporządkowanych zmiennych losowych.** Nierówności są ważnym narzędziem badawczym w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej. Dostarczają informacji o możliwych wartościach pewnych charakterystyk modelu matematycznego w sytuacji, kiedy wiedza na temat modelowanego zjawiska, procesu czy eksperymentu losowego jest niepełna. Pierwsze oszacowania dla wartości oczekiwanych statystyk porządkowych z niezależnych obserwacji o tym samym rozkładzie, o znanej wartości oczekiwanej i wariancji, podali Gumbel [40], Hartley i David [42] oraz Moriguti [58]. Prace te zainicjowały serię uogólnień. Wymienimy tylko kilka z nich. Odpowiedniki nierówności Hartleya–Davida–Gumbela dla klasycznych statystyk rekordowych i statystyk rekordowych  $k$ -tego rzędu przedstawili Nagaraja [62] i Raqab [76]. Rozszerzenia do modelu progresywnie cenzurowanych statystyk porządkowych i uogólnionych statystyk porządkowych zaprezentowali Balakrishnan i in. [7] oraz Kamps [45]. Oszacowania wyrażone za pomocą  $p$ -tych momentów absolutnych i  $p$ -tych absolutnych momentów centralnych wyznaczyli Gilstein [35], Arnold [1] i Lin [54]. Podsumowanie uzyskanych wyników można znaleźć m.in. w monografiach Arnolda i Balakrishnana [2], Rychlika [88] oraz Davida i Nagaraja [19].

Praca [B1] nawiązuje do wymienionych wyżej wyników i podaje kilka nowych nierówności dla wartości oczekiwanych statystyk porządkowych i rekordowych wyrażonych za pomocą wartości oczekiwanej odpowiednio uciętego rozkładu obserwacji. W matematyce finansowej i ubezpieczeniowej takie funkcjonały wykorzystuje się do wyceny ryzyka i określa mianem wartości zagrożonej na ogonie rozkładu (ang. *Tail Value-at-Risk, TVaR*; zob. np. [44]). W pracy [B2] wyznaczono ograniczenia tego typu dla uogólnionych statystyk porządkowych i pokazano, że są one lepsze od odpowiadających im oszacowań Rychlika [82] oraz Gascuela i Caraux [32] dla statystyk porządkowych z dowolnie zależnych zmiennych losowych. Jako wnioski, przy słabszych dodatkowych założeniach o rozkładzie obserwacji, otrzymano rozszerzenie wyników Papadatosa [69] i Bloma [15] do modelu uogólnionych statystyk porządkowych. W przypadku statystyk rekordowych oszacowania te ulepszone w artykule [C1]. W pracy [C2] podano odpowiedniki twierdzeń z [B2] dla wartości oczekiwanej quasi-wypukłej, niemonotonicznej funkcji uogólnionych statystyk porządkowych, które prowadzą m.in. do oszacowań dla wariancji uogólnionych statystyk porządkowych (por. [68]). Artykuł [C3] jest poświęcony oszacowaniom momentów uogólnionych statystyk porządkowych, gdy próba pochodzi z rozkładu należącego do pewnej klasy rozkładów, zdefiniowanej poprzez pewną własność dystrybuant. Elementami rozważanej klasy są m.in. rozkłady Pareto, jednostajne i wykładnicze. W szczególności, dla wybranych rozkładów o funkcjach kwantylowych wypukłych (wklęsłych), podane oszacowania dolne (górne) są lepsze od uzyskanych przez Kamps [45]. Głównym narzędziem służącym do konstrukcji

oszacowań w pracach [B1, B2, C1, C2, C3] jest nierówność Steffensena oraz nierówność Morigutiego.

Wykorzystując metodę Morigutiego, w pracy [C4] wyznaczamy jawną postać optymalnych górnych i dolnych oszacowań dla obciążenia estymatora  $\hat{F}^{-1}(p)$  nieznanego kwantyla  $F^{-1}(p)$  w przypadku, gdy  $\hat{F}^{-1}(p)$  jest kwantylem z próby  $X_{j:n}$  takim, że  $j/n$  jest bliskie  $p \in (0, 1)$ . Ograniczenia wyrażone są w jednostkach odchylenia standardowego rozkładu obserwacji.

W artykule [C5] podajemy optymalne oszacowania górne wartości oczekiwanej  $k$ -tych statystyk rekordowych w ciągu niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z malejącym prawdopodobieństwem awarii oraz z malejącą intensywnością awarii, wyrażone za pomocą drugiego momentu zwykłego obserwacji. Obie klasy rozkładów mają podstawowe znaczenie w teorii niezawodności. Do uzyskania oszacowań zastosowaliśmy metodę rzutowania zaproponowaną – oraz wykorzystaną w przypadku statystyk porządkowych – przez Gajka i Rychlika [28, 29]. Metoda ta, będąca uogólnieniem metody Morigutiego, umożliwia wyznaczenie maksimum liniowego i ciągłego funkcjonału określonego na przestrzeni Hilberta  $\mathcal{X}$ , w stożku wypukłym  $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ . Główną przeszkodą, którą musieliśmy pokonać, było wykazanie prawdziwości *własności zmniejszającej się zmienności* dla kombinacji liniowych gęstości  $k$ -tych statystyk rekordowych z rozkładu jednostajnego na przedziale  $(0, 1)$ . W tym celu użyliśmy twierdzenia Karlina [46] dla rozkładów typu Pólya.

W pracy [C6] przedstawiono pierwsze w literaturze nierówności, które do oszacowania momentów uogólnionych statystyk porządkowych wykorzystują dwa ważne funkcjonały: *entropię* oraz *momenty wykładnicze*. Podano tam także oszacowania nieasymptotyczne i asymptotyczne dla wartości oczekiwanej funkcji wektora uogólnionych statystyk porządkowych. W artykule [C7] wyznaczamy ograniczenia dla momentów uogólnionych statystyk porządkowych za pomocą entropii Tsallisa, która została wprowadzona w fizyce w 1988 roku jako uogólnienie entropii Boltzmana-Gibbsa. Nie nakładamy żadnych ograniczeń na wartości parametrów uogólnionych statystyk porządkowych oraz dopuszczamy możliwość losowości indeksów. Statystyki porządkowe z losowymi indeksami pojawiają się w naturalny sposób np. w stochastycznym modelu relaksacji, rozważanym przez Jurlewicz i Weron [43]. Osiągalne nierówności dla wartości oczekiwanej uogólnionych statystyk porządkowych wyrażone za pomocą momentów postaci  $\mathbf{E} \left( X^a (\ln_+ X)^b \right)$ , gdzie  $\ln_+ x = \ln \max(x, 1)$ , podaliśmy w pracy [C9]. Momenty tego typu spotykamy m.in. w nierówności Dooba dla nieujemnych submartyngałów oraz w wielowymiarowych twierdzeniach ergodycznych. W przypadku statystyk rekordowych uzyskane oszacowania są uniwersalne w tym sensie, że ograniczenie na wartość oczekiwaną  $r$ -tego rekordu pierwszego rzędu  $\mathbf{E}Y_r^{(1)}$ , gdzie  $r \geq 2$ , wyrażone jest za pomocą momentu logarytmicznego, który istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $\mathbf{E}Y_r^{(1)}$ . Oszacowania zaprezentowane w [C6] zostały uzyskane w oparciu o nierówności Morigutiego i Younga, natomiast przedstawione w [C7, C9] – przy użyciu nierówności Morigutiego i odpowiednio skonstruowanych nierówności elementarnych.

Praca [C11] podaje uogólnienia oszacowań dla statystyk porządkowych na przypadek konkomitant (statystyk stowarzyszonych) w próbie niezależnych par o tym samym rozkładzie. Zależność pomiędzy poprzednikami a następnikami par modelowana jest za pomocą kopuł lub klasycznego schematu losowania bez zwracania. Wyznaczono m.in. odpowiedniki nierówności Hartleya–Davida–Gumbela oraz Balakrishnana–Charalambidesa–Papadatosa (zob. [6]).

W artykule [C12] badamy własności statystyk porządkowych z próby dowolnie zależnych zmiennych losowych o niekoniecznie tych samych rozkładach symetrycznych względem pewnego  $\mu \in \mathbb{R}$ . Przykładami tego typu modeli są wybrane łańcuchy Markowa oraz modele GARCH i ARMA. Pokazujemy, że wartość oczekiwana pewnych  $L$ -statystyk z takich prób jest nie mniejsza od wartości oczekiwanej pojedynczej obserwacji. Uzyskane nierówności stanowią odpowiednik nierówności Rychlika [91] dla niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie symetrycznym (por. [87, Eq. (53)]).

Praca [C13] jest poświęcona badaniu stabilności wartości oczekiwanej, drugiego momentu zwykłego i wariancji  $L$ -statystyki ze względu na pewne typy zależności obserwacji inspirowane koncepcją warunków mieszania. Podajemy w niej oszacowania dla różnicy momentów  $L$ -statystyk z prób niezależnych i zależnych obserwacji o identycznych odpowiadających sobie jednowymiarowych rozkładach brzegowych, wyrażone za pomocą iloczynu parametru liczbowego opisującego wielkość otoczenia i charakterystyki liczbowej próby niezależnych zmiennych losowych.

Oszacowania uzyskane w pracach [B2], [C1]–[C3], [C5]–[C7], [C9], [C11]–[C13] mogą być użyte m.in. do konstrukcji testów zgodności dla pewnych typów rozkładów, konstrukcji przedziałów ufności dla pewnych funkcjonałów uogólnionych statystyk porządkowych i konkomitant, weryfikacji hipotez statystycznych i sprawdzenia, czy spełnione są warunki wystarczające lub konieczne do zachodzenia twierdzeń granicznych wyrażone za pomocą istnienia skończonych momentów uogólnionych statystyk porządkowych i konkomitant. Warto podkreślić, że wyniki żadnej z prac [B2], [C2], [C3], [C5]–[C7], [C9] oraz [C11]–[C13] nie uogólniają wyników z innej pracy z tego zestawu.

**2. Lemat Fatou dla słabej zbieżności.** Wyznaczanie granic ciągów momentów zmiennych losowych jest jednym z ważnych problemów rachunku prawdopodobieństwa. W pracy [C8] podano odpowiednik lematu Fatou dla monotonicznych funkcji słabo zbieżnych ciągów zmiennych losowych. Sprowadza on zadanie wyznaczania granicy do konstrukcji pewnego ciągu bliźniaczego (ang. *coupling*) i skorzystania z odpowiedniego twierdzenia granicznego podającego oszacowanie szybkości zbieżności do rozkładu granicznego, np. twierdzenia Berry–Esséena, oszacowania Bikelisa lub twierdzenia Craméra. Praca koryguje błędne twierdzenie z pracy Garcii i Palacios [31].

**3. Matematyka ubezpieczeniowa.** Matematyka aktuarialna powstała wraz z rozwojem działalności ubezpieczeniowej. Podzielona jest na teorię ubezpieczeń osobowych i teorię ubezpieczeń majątkowych. Studia nad metodami obliczania wartości produktów ubezpieczeniowych przyczyniły się do rozwoju probabilistyki.

W artykule [C18] badamy własności składek jednorazowych netto w ubezpieczeniach dla wielu osób w przypadku, gdy łączny rozkład przyszłych czasów trwania życia posiada nieznaną strukturę zależności, należącą do pewnego nieparametrycznego otoczenia niezależności typu Kołmogorowa (zob. [C13, A6]). Podajemy oszacowania różnicy składek dla grupy osób o zależnych i dla grupy osób o niezależnych przyszłych czasach trwania życia w sytuacji, kiedy przyszłe czasy życia odpowiadających sobie osób z tych dwóch grup mają identyczne rozkłady. Ograniczenia wyrażone są za pomocą parametru liczbowego określającego wielkość otoczenia i jednorazowych składek netto dla statusów łącznego życia podgrup grupy osób o niezależnych przyszłych czasach życia.

W pracy [C14] wyznaczono optymalny podział ryzyka w klasie uogólnionych składek Esschera (zwanymi też ważonymi składkami), która zawiera składki Karlsruhe, Kampsa, Aumanna–Shapleya, Esschera–Girsanowa i wiele innych, oraz udowodniono twierdzenie o warunku koniecznym optymalności. Ponadto wykazano, że charakterystyka De Vyldera–Goovaerts–Haezendoncka składki Esschera, podana w 1984 roku w książce [37]



i replikowana w wielu monografiach (np. [21, 44]) jest fałszywa nawet wtedy, gdy wykładniczą funkcję użyteczności zamienimy na dowolną funkcję ściśle rosnącą lub prawdopodobieństwo ruiny. Zaproponowano kilka sposobów korekty tego wyniku.

Praca [C10] jest poświęcona problemowi optymalnego podziału ryzyka, gdy do wyceny kontraktu zostanie użyta składka maksymalnych możliwych szkód. Składka ta ma wiele korzystnych własności, m.in. jest koherentna, addytywna dla ryzyk niezależnych i addytywna dla ryzyk komonotonicznych. Ponadto jest ona granicą innych składek, gdy parametry określające te składki dążą do wartości ekstremalnych (patrz [C10]). W pracy podano jawne rozwiązania zadań minimalizacji pewnych miar stabilności wypłat cedenta oraz maksymalizacji jego oczekiwanej użyteczności.

**4. Dynamika układów mechanicznych ze zderzeniami.** W teorii drgań układów mechanicznych ważne miejsce zajmują układy wibrouderzeniowe. Stały się one przedmiotem badań w połowie lat pięćdziesiątych minionego wieku i od tego czasu zainteresowanie nimi stale rośnie. Analiza dynamiki takich układów za pomocą klasycznych metod sprawia wiele trudności. Prace [C15, C19] zawierają rezultaty symulacji numerycznych dotyczących ruchu układu o jednym stopniu swobody, w którym pod wpływem harmonicznego wymuszenia zewnętrznego dochodzi do jedno- lub dwustronnych zderzeń z nieruchomą hertzowską lub newtonowską ostoją. W pracach [C20, C21] rozważono układ złożony z ciała jednostronnie lub dwustronnie uderzającego o ruchome newtonowskie podłoże. Modyfikując podejście Peterki [74] oparte na teorii równań różnicowych, analitycznie wyznaczono obszary występowania stabilnych rozwiązań okresowych. Liczne eksperymenty numeryczne pokazały, że metoda analityczna i odpowiednio zaadaptowana metoda Müllera [61] – numerycznej estymacji wykładników Lapunowa – prowadzą do zgodnych wyników. W artykule [C22] przedstawiono rezultaty symulacji numerycznych świadczących o tym, że odpowiednio skonstruowane układy zastępcze – o jednym, a zwłaszcza o dwóch stopniach swobody – można wykorzystać do badania okresowości ruchu z uderzeniami rzeczywistych układów drgających o znaczącej masie elementów sprężystych.

**5. Nierówności dla całek względem miar nieaddytywnych.** Badania nad klasycznymi nierównościami dla całki Sugeno zainicjowali Román-Flores i in. [78, 79] w 2007 roku. W kolejnych latach powstało wiele prac poświęconych tego typu nierównościami oraz ich rozszerzeniom na uogólnione całki Sugeno. Tylko w jednej z nich – pracy Giroto i Holzera [36] dotyczącej nierówności typu Czebyszewa dla całki Sugeno – oprócz warunków wystarczających, przedstawiono również warunki konieczne zachodzenia nierówności dla funkcji komonotonicznych. Wykorzystując nową metodę dowodu, w pracach [C16, C17] sformułowano warunki konieczne i wystarczające zachodzenia nierówności typu Jensena i Czebyszewa dla uogólnionej całki Sugeno względem dowolnej miary nieaddytywnej. Uzyskane wyniki umożliwiły m.in. podanie charakteryzacji klas funkcji spełniających pewne typy nierówności Czebyszewa dla wybranych uogólnionych całek Sugeno.

## Literatura

- [1] B. C. ARNOLD, *p-Norm bounds on the expectation of the maximum of possibly dependent sample*, J. Multivar. Anal. 17 (1985), 316–332.
- [2] B. C. ARNOLD, N. BALAKRISHNAN, *Relations, bounds and approximations for order statistics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [3] B. C. ARNOLD, N. BALAKRISHNAN, H. N. NAGARAJA, *A first course in order statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

- [4] B. C. ARNOLD, R. A. GROENEVELD, *Bounds on expectations of linear systematic statistics based on dependent samples*, Ann. Statist. 7 (1979), 220–223.
- [5] T. AVEN, *Upper (lower) bounds on mean of maximum (minimum) of a number of random variables*, J. Appl. Prob. 22 (1985), 723–728.
- [6] N. BALAKRISHNAN, C. CHARALAMBIDES, N. PAPADATOS N, *Bounds on expectation of order statistics from a finite population*, J. Statist. Plann. Inference 113 (2003), 569–588.
- [7] N. BALAKRISHNAN, E. CRAMER, U. KAMPS, *Bounds for means and variances of progressive type II censored order statistics*, Statist. Probab. Lett. 54 (2001), 301–315.
- [8] N. BALAKRISHNAN, C. R. RAO (EDS.), *Order statistics: applications*, Handbook of Statistics 17, North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [9] R. E. BARLOW, F. PROSCHAN, *Mathematical theory of reliability*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [10] N. BERNOULLI, *Specimina artis conjectandi, ad quaestiones juris applicatae*, Basle, 1079. Reprinted in *Actorum Eruditorum quae Lipsiae Publicantur Supplementa 4* (1711), 159–170.
- [11] D. BERTSIMAS, K. NATARAJAN, C.-P. TEO, *Tight bounds on expected order statistics*. Prob. Engineer. Inform. Sci. 20 (2006), 667–686.
- [12] M. BIENIEK, *Optimal bounds on the bias of quasimidranges*, Statistics 49 (2015), 1382–1399.
- [13] M. BIENIEK, *Sharp bounds on the bias of trimean*, Statistical Papers 57 (2016), 365–379.
- [14] M. BIENIEK, *Comparison of the bias of trimmed and Winsorized means*, Comm. Statist. Theory Methods 45 (2016), 6641–6650.
- [15] G. BLOM, *Statistical estimates and transformed beta-variables*, Almquist and Wiksells, Uppsala, 1958.
- [16] G. CARAUX, O. GASCUEL, *Bounds on distribution functions of order statistics for dependent variates*, Statist. Probab. Lett. 14 (1992), 103–105.
- [17] S.-J. CHU, W.-J. HUANG, H. CHEN, *A study of asymptotic distributions of concomitants of certain order statistics*, Stat. Sinica 9 (1999), 811–830.
- [18] P. J. DANIELL, *Observations weighted according to order*, Amer. J. Math. 42 (1920), 222–236.
- [19] H. A. DAVID, H. N. NAGARAJA, *Order statistics*, Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 3rd ed., 2003.
- [20] J. DEDECKER, P. DOUKHAN, G. LANG, J. R. LEON, S. LOUHICHI, C. PRIEUR, *Weak dependence: with examples and applications*, Springer, New York, 2007.
- [21] M. DENUIT, J. DHAENE, M. J. GOOVAERTS, R. KAAS, *Actuarial theory for dependent risks*, Wiley, Chichester, 2005.
- [22] K. DOWD, J. COTTER, G. SORWAR, *Spectral risk measures: properties and limitations*, J. Finan. Serv. Res. 34 (2008), 61–75.
- [23] F. DURANTE, C. SEMPI, *Principles of copula theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [24] P. EMBRECHTS, G. PUC CETTI, *Bounds for the sum of dependent risks having overlapping marginals*, J. Multivariate Anal. 101 (2010), 177–190.
- [25] P. ERDŐS, J. NEVEU, A. RÉNYI, *An elementary inequality between the probabilities of events*, Math. Scand. 13 (1963), 99–104.
- [26] R. A. FISHER, L. H. C. TIPPETT, *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 24 (1928), 180–190.
- [27] M. FRÉCHET, *Sur la loi de probabilité de l'écart maximum*, Ann. Soc. Polonaise de Math. (Cracow) 6 (1927), 93–116.
- [28] L. GAJEK, T. RYCHLIK, *Projection method for moment bounds on order statistics from restricted families. I. Dependent case*, J. Multivariate Anal. 57 (1996), 156–174.
- [29] L. GAJEK, T. RYCHLIK, *Projection method for moment bounds on order statistics from restricted families. II. Independent case*, J. Multivariate Anal. 64 (1998), 156–182.
- [30] J. GALAMBOS, I. SIMONELLI, *Bonferroni-type inequalities with applications*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [31] N. L. GARCIA, J. L. PALACIOS, *On inverse moments of nonnegative random variables*, Statist. Probab. Lett. 53 (2001), 235–239.
- [32] O. GASCUEL, G. CARAUX, *Bounds on expectations of order statistics via extremal dependences*, Statist. Probab. Lett. 15 (1992), 143–148.
- [33] C. GENEST, J. NEŠLEHOVÁ, *A primer on copulas for count data*, ASTIN Bull. 37 (2007), 475–515.
- [34] C. GENEST, J. G. NEŠLEHOVÁ, B. RÉMILLARD, *On the empirical multilinear copula process for count data*, Bernoulli 20 (2014), 1344–1371.

- [35] C. Z. GILSTEIN, *Bounds on expectations of linear combinations of order statistics* (preliminary report), Abstract number 177-100, Inst. Math. Statist. Bull. 10 (1981), p. 253.
- [36] B. GIROTTO, S. HOLZER, *A Chebyshev type inequality for Sugeno integral and comonotonicity*, Int. J. Approx. Reason. 52 (2011), 444–448.
- [37] M. J. GOOVAERTS, F. DE VYLDER, J. HAEZENDONCK, *Insurance premiums: theory and applications*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [38] F. GRESELIN, M. L. PURI, R. ZITIKIS, *L-functions, processes, and statistics in measuring economic inequality and actuarial risk*, Statist. Interface 2 (2009), 227–245.
- [39] E. J. GUMBEL, *Les valeurs extrêmes des distributions statistiques*, Ann. Inst. Henri Poincaré 5 (1935), 115–158.
- [40] E. J. GUMBEL, *The maxima of the mean largest value and of the range*, Ann. Math. Statistics, 25 (1954), 76–84.
- [41] H. L. HARTER, *The chronological annotated bibliography of order statistics*, 1. Pre-1950, U.S. Government Printing Office, Washington, DC. Revised edition, 1983, American Sciences Press, Columbus, OH.
- [42] H. O. HARTLEY, H. A. DAVID, *Universal bounds for mean range and extreme observation*, Ann. Math. Statistics, 25 (1954), 85–99.
- [43] A. JURLEWICZ, K. WERON, *Relaxation of dynamically correlated clusters*, J. Non-Cryst. Solids 305 (2002), 112–121.
- [44] R. KAAS, M. J. GOOVAERTS, J. DHAENE, M. DENUIT, *Modern actuarial risk theory using R*, Kluwer Academic Publishers, Springer, Berlin, 2nd ed., 2008.
- [45] U. KAMPS, *A concept of generalized order statistics*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995.
- [46] S. KARLIN, *Decision theory for Pólya type distributions. Case of two actions. I*, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Statistics and Probability, 1957.
- [47] J. H. B. KEMPERMAN, *Bounding moments of an order statistic when each  $k$ -tuple is independent*, in: V. Beneš, J. Štěpán (Eds.) *Distributions with given marginals and moment problems*, Kluwer, Dordrecht, 1997, pp. 291–304.
- [48] S. KOTZ, N. BALAKRISHNAN, N. L. JOHNSON, *Continuous multivariate distributions, Volume 1, Models and Applications*, Wiley, New York, 2nd ed., 2000.
- [49] M. G. KREIN, A. A. NUDEL'MAN, *The Markov moment problem and extremal problems*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 50, Providence: American Mathematical Society, 1977.
- [50] E. KREMER, *Largest claims reinsurance premiums under possible claims dependence*, ASTIN Bull. 28 (1998), 257–267.
- [51] T. L. LAI, H. ROBBINS, *Maximally dependent random variables*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 73 (1976), 286–288.
- [52] P. S. LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités, deuxième supplément*. Section 2. Reprinted in *Oeuvres de Laplace 7*. Imprimerie Royale, Paris, 1847.
- [53] C. LEFÉVRE, *Bounds on the expectations of linear combinations of order statistics with applications to Pert networks*, Stochastic Anal. Appl. 4 (1986), 351–356.
- [54] G. D. LIN, *Characterizations of uniform distributions and of exponential distributions*, Sankhya Ser. A 59 (1988), 64–69.
- [55] C. L. MALLOWS, *Extrema of expectations of uniform order statistics*, SIAM Rev. 11 (1969), 410–411.
- [56] C. L. MALLOWS, *Minimizing the expected minimum*, Adv. Appl. Math. 31 (2003), 180–192.
- [57] R. VON MISES, *La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs*, Rev. Math. Union Interbalcanique 1 (1936), 141–160.
- [58] S. MORIGUTI, *A modification of Schwarz's inequality with applications to distributions*, Ann. Math. Stat. 24 (1953), 107–113.
- [59] K. MORRIS, D. SZYNAL, *Goodness-of-fit tests based on characterizations in terms of moments of order statistics*, Appl. Math. 29 (2002), 251–283.
- [60] T. F. MÓRI, G. J. SZÉKELY, *A note on the background of several Bonferroni-Galambo-type inequalities*, J. Appl. Prob. 22 (1985), 836–843.
- [61] P. C. MÜLLER, *Calculation of Lyapunov exponents for dynamical systems with discontinuities*, Chaos Soliton Fract. (1995), 1671–1681.
- [62] H. N. NAGARAJA, *On the expected values of record values*, Austral. J. Statist. 20 (1978), 176–182.
- [63] H. N. NAGARAJA, *Some finite sample results for the selection differential*, Ann. Inst. Statist. Math. 33 (1981), Part A, 437–448.

- [64] H. N. NAGARAJA, H. A. DAVID, *Distribution of the maximum of concomitants of selected order statistics*, Ann. Statist. 22 (1994), 478–494.
- [65] J. NAVARRO, N. BALAKRISHNAN, F. J. SAMANIEGO, D. BHATTACHARYA, *On the application and extension of system signatures to problems in engineering reliability*, Naval Res. Logist. 55 (2008), 313–327.
- [66] J. NAVARRO, T. RYCHLIK, *Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components*, J. Multivariate Anal. 98 (2007), 102–113.
- [67] I. OLKIN, *A matrix formulation on how deviant an observation can be*, Amer. Statist. 46 (1992), 205–209.
- [68] N. PAPADATOS, *Maximum variance of order statistics*, Ann. Inst. Statist. Math. 47 (1995), 185–193.
- [69] N. PAPADATOS, *Exact bounds for the expectations of order statistics from non-negative populations*, Ann. Inst. Statist. Math., 49 (1997), 727–736.
- [70] N. PAPADATOS, *Expectation bounds on linear estimators from dependent samples*, J. Statist. Plann. Inference 93 (2001), 229–240.
- [71] N. PAPADATOS, *Distribution and expectation bounds on order statistics from possibly dependent variates*, Statist. Probab. Lett. 54 (2001), 21–31.
- [72] N. PAPADATOS, *Maximizing the expected range from dependent observations under mean–variance information*, Statistics 50 (2016), 596–629.
- [73] K. PEARSON, *Note on Francis Galton’s problem*, Biometrika 1 (1902), 390–399.
- [74] F. PETERKA, *An investigation of the motion of impact dampers: theory of the fundamental impact motion*, Strojnický Casopis (1970), 457–478.
- [75] G. PUCETTI, L. RÜSCHENDORF, D. MANKO, *VaR bounds for joint portfolios with dependence constraints*, Depend. Model. 4 (2016), 368–381.
- [76] M. Z. RAQAB, *Bounds based on greatest convex minorants for moments of record values*, Statist. Probab. Lett. 36 (1997), 35–41.
- [77] A. RÉNYI, *On the theory of order statistics*, Acta Math. Hung. 4 (1953), 191–231.
- [78] H. ROMÁN-FLORES, A. FLORES-FRANULIC, Y. CHALCO-CANO, *A Jensen type inequality for fuzzy integrals*, Inform. Sci. 177 (2007), 3192–3201.
- [79] H. ROMÁN-FLORES, Y. CHALCO-CANO, *Sugeno integral and geometric inequalities*, Int. J. Uncertain. Fuzz. 15 (2007), 1–11.
- [80] L. RÜSCHENDORF, *Bounds for distributions with multivariate marginals*, in: K. Mosler, M. Scarsini (Eds.), Stochastic Orders and Decision Under Risk, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1991, pp. 285–310.
- [81] L. RÜSCHENDORF, *Mathematical risk analysis. Dependence, risk bounds, optimal allocations and portfolios*, Springer, Heidelberg, 2013.
- [82] T. RYCHLIK, *Statistically extremal distributions for dependent samples*, Statist. Probab. Lett. 13 (1992), 337–341.
- [83] T. RYCHLIK, *Bounds for expectations of L-estimates for dependent samples*, Statistics 24 (1993), 1–7.
- [84] T. RYCHLIK, *Sharp bounds on L-estimates and their expectations for dependent samples*, Commun. Statist. Theory Methods 22 (1993), 1053–1068.
- [85] T. RYCHLIK, *Distributions and expectations of order statistics for possibly dependent random variables*, J. Multivariate Anal. 48 (1994), 31–42.
- [86] T. RYCHLIK, *Bounds for order statistics based on dependent variables with given nonidentical distributions*, Statist. Probab. Lett. 13 (1995), 351–358.
- [87] T. RYCHLIK, *Bounds for expectations of L-estimates*, Order statistics: theory & methods, vol. 16 of Handbook of Statistics, North-Holland, Amsterdam, 1998, 105–145.
- [88] T. RYCHLIK, *Projecting statistical functionals*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [89] T. RYCHLIK, *Stability of order statistics under dependence*, Ann. Inst. Statist. Math. 53 (2001), 877–894.
- [90] T. RYCHLIK, *Sensitivity of spacings under violations of independence assumption*, JIRSS 6 (2007), 141–154.
- [91] T. RYCHLIK, *Tight evaluations for expectations of small order statistics from symmetric and symmetric unimodal populations*, Statist. Probab. Lett. 79 (2009), 1488–1493.
- [92] P. A. SAMUELSON, *How deviant you can be?* J. Amer. Statist. Assoc. 63 (1968), 1522–1525.

- [93] R. SEIDEL, *Convex hull computations*, in: J. E. Goodman, J. O'Rourke (Eds.), *Handbook of discrete and computational geometry*, Boca Raton, CRC Press, 2004, pp. 495–512.
- [94] M. SIBUYA, *Bonferroni-type inequalities; Chebyshev-type inequalities for the distributions on  $[0, n]$* , *Ann. Inst. Statist. Math.* 43, 261–285.
- [95] P. TANKOV, *Improved Fréchet-Hoeffding bounds and model-free pricing of multi-asset options*, *J. Appl. Probab.* 48 (2011), 389–403.
- [96] E. M. TIIT, *Mixtures of multivariate quasi-extremal distributions having given marginals*, in: L. Rüschendorf, B. Schweizer, M. D. Taylor (Eds.), *Distributions with fixed marginals and related topics*, *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, vol. 28, Inst. Math. Statist., Hayward, CA, 1996, pp. 337–357.

Andrzej Okolewski