

Zielona Góra, 10 sierpnia, 2017

prof. dr hab. Janusz Matkowski  
Wydział Matematyki Informatyki i Ekonometrii  
Uniwersytet Zielonogórski

**Recenzja rozprawy habilitacyjnej oraz innych osiągnięć naukowych  
dr Elizy Łucji Jabłońskiej  
w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia naukowego doktora  
habilitowanego**

Dr Eliza Jabłońska ukończyła studia matematyczne w roku 2002 na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu Szczecińskiego, a stopień doktora nauk matematycznych uzyskała w roku 2007, na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Akademii Pedagogicznej w Krakowie, na podstawie rozprawy przygotowanej pod opieką naukową dra hab. Janusza Brzdęka, zatytułowanej: *O rozwiązaniach pewnego uogólnienia równania funkcyjnego Gołąba-Schinzla*.

Zasadniczym osiągnięciem dr E. Jabłońskiej, które jest podstawą wniosku o nadanie stopnia dra habilitowanego, jest rozprawa habilitacyjna zatytułowana: *"Wybrane analogie między zbiorami zerowymi Haara a zbiorami pierwszej kategorii Haara oraz pewne zastosowania do równań funkcyjnych"* składająca się z cyklu sześciu prac [J1]-[J6].

Główna tematyka rozprawy dotyczy uogólnień twierdzeń H. Steinhausa o niepustości wnętrza algebraicznej różnicy zbioru oraz niepustości wnętrza algebraicznej sumy zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, ich kategorijskich odpowiedników uzyskanych przez B. J. Pettisa (1951) i S. Piccard (1939), oraz zachodzących między nimi analogii.

W myśl twierdzenia Steinhausa (1920), jeśli  $A, B \subset \mathbb{R}$  są zbiorami o dodatniej mierze Lebesgue'a to  $0$  jest punktem wnętrza zbioru  $A - A$  oraz wnętrze zbioru  $A + B$  jest niepuste. Topologiczne wersje tych faktów uzyskali, odpowiednio, B. S. Pettis (1951) i S. Piccard (1939).

Przy wykorzystaniu miary Haara, obie tezy Steinhausa, przenoszą się odpowiednio (A. Weil, 1940, oraz A. Beck-H.H. Corson - A.B. Simon, 1959) na lokalnie zwarte polskie

grupy abelowe.

W roku 1972, L. Dubikajtis, C. Ferens, R. Ger i M. Kuczma, przy ogólniejszych założeniach, uzyskali ich topologiczne odpowiedniki. Pokazali mianowicie, że obie tezy pozostają prawdziwe, jeśli  $X$  jest grupą topologiczną (niekoniecznie lokalnie zwartą) oraz  $A, B \subset X$  są zbiorami drugiej kategorii o własności Baire'a.

W tej sytuacji pojawiło się naturalne pytanie o zachodzenie miarowych odpowiedników tego twierdzenia. Jest one trudniejsze, bo w (polskich) grupach abelowych, które nie są lokalnie zwarte, miara Haara nie istnieje.

W tym samym roku J.P.R. Christensen, wykorzystując  $\sigma$ -ciało zbiorów uniwersalnie mierzalnych, wprowadził, w polskiej grupie abelowej  $X$ , pojęcie *zbioru zerowego Haara*; pokazał, że rodzina  $\mathcal{HN}_X$  takich podzbiorów jest  $\sigma$ -ideałem oraz, gdy  $X$  jest lokalnie zwarta, że zbiór jest zerowy wtedy i tylko wtedy gdy jego miara Haara jest zero. Ponadto udowodnił, że jeśli  $A$  jest uniwersalnie mierzalnym podzbiorem niezerowym polskiej grupy abelowej to  $0$  jest punktem wewnętrznym zbioru  $A - A$ , czyli, że zachodzi pierwsza z tez Steinhausa.

W roku 1998, E. Matoůsková i L. Zajiček udowodnili, że przy tych samych założeniach, druga z tez Steinhausa nie zachodzi, a w roku 2002, E. Matoůsková i M. Zelený, dla dowolnej polskiej grupy abelowej  $X$ , która nie jest lokalnie zwarta, podali konstrukcję takich domkniętych zbiorów niezerowych Haara  $A, B \subset X$ , że wewnątrz zbioru  $A + B$  jest zbiorem pustym. To pokazuje w szczególności, że dla zachodzenia drugiej tezy Steinhausa, zbiory pierwszej kategorii Baire'a powinno się tutaj zastąpić innym pojęciem zbioru "małego".

Potrzebę tą spełnia w roku 2013, U.B. Darji, definiując w polskiej grupie abelowej  $X$  pojęcie zbioru pierwszej kategorii Haara następująco: Zbiór  $A \subset X$  nazywamy *zbiorem pierwszej kategorii Haara* (Haar meager set), jeśli istnieją: zbiór borelowski  $B \subset X$  zawierający  $A$ , przestrzeń metryczna zwarta  $K$ , oraz taka funkcja ciągła  $f : K \rightarrow X$ , że dla każdego  $x \in X$ , zbiór  $f^{-1}(B + x)$  jest zbiorem pierwszej kategorii w  $K$ . Ponadto, oznaczając rodzinę tych zbiorów symbolem  $\mathcal{HM}_X$ , pokazał, że tworzy ona  $\sigma$ -ideał zawierający się w  $\sigma$ -ideale zbiorów pierwszej kategorii Baire'a, oraz że w przypadku przestrzeni lokalnie zwartej, te ideały się pokrywają.

W roku 2015, w te ciekawe badania, włącza się Habilitantka. Wykorzystując pojęcie wprowadzone przez Darji'ego, w pracy [J-3] dowodzi, że *jeśli  $X$  jest polską grupą abelową, to dla każdego zbioru borelowskiego  $A \subset X$ , który nie jest zbiorem pierwszej kategorii Haara, zachodzi pierwsza z tez Steinhausa* (Twierdzenie 9 w Autoreferacie). Ponadto zauważa że polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta, druga z tez Steinhausa nie przenosi na zbiory borelowskie "drugiej" kategorii Haara; oraz, że zbiory w przykładzie E. Matoůskovej i M. Zelený'ego zawierają pewne przesunięcia każdego zbioru zwartego, a więc nie są pierwszej kategorii Haara. Pokazuje to w szczególności, że w takich przestrzeniach teza twierdzenia S. Piccard nie jest prawdziwa dla zbiorów borelowskich, które nie są zbiorami pierwszej kategorii Haara.

Korzystając z Twierdzenia 9, najważniejszego wyniku rozprawy, wnioskuje, że w polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta, każdy zbiór  $\sigma$ -zwarty jest "mały" w sensie Darijego i w sensie Christensena. Ponieważ podzbiór borelowski polskiej grupy abelowej zawierający pewne przesunięcie każdego zbioru zwartego jest "duży" w obu sensach (czyli, że nie jest zbiorem zerowym Haara, ani zbiorem pierwszej kategorii Haara), stawia naturalne pytania: czy istnieje zbiór pierwszej kategorii Haara,

który nie jest zbiorem zerowym Haara; lub, czy istnieje zbiór zerowy Haara, który nie jest pierwszej kategorii Haara. Aby na nie odpowiedzieć, dowodzi najpierw m.in. pewnych własności produktowych zbiorów pierwszej kategorii Haara, a następnie w przestrzeniach  $c_0$ ,  $c$  oraz  $l_p$  ( $p \geq 1$ ) konstruuje przykład zbioru zerowego Haara, który nie jest zbiorem pierwszej kategorii Haara, a który jest pierwszej kategorii Baire'a; oraz przykład zbioru pierwszej kategorii Haara, który nie jest zbiorem zerowym Haara.

W pracy [J6] dowodzi, że jeśli  $X$  jest polską grupą abelową i  $A \subset X$  jest zbiorem borelowskim, to dla każdej liczby naturalnej  $n$ , zbiór

$$\left\{ x \in X : \left( \bigcap_{k \in \{-n, \dots, n\}} (A + kx) \right) \notin \mathcal{HM}_X \right\}$$

jest otwarty; jeśli ponadto  $A \notin \mathcal{HM}_X$ , to zbiór ten jest otoczeniem zera oraz 0 jest punktem wewnętrznym zbioru

$$\left\{ x \in X : \bigcap_{j=1}^n \left[ \left( A - \frac{x}{j} \right) \cap \left( A - \frac{x}{j} \right) \right] \neq \emptyset \right\}.$$

Ten wynik jest analogonem twierdzenia Z. Gajdy (1986), który zakładał uniwersalną mierzalność zbioru  $A$ .

W pracy [J5], przy tych samych założeniach o przestrzeni  $X$ , dowodzi, że dla każdej liczby naturalnej  $N$  i dla każdego zbioru borelowskiego  $A \subset X$ ,  $A \notin \mathcal{HM}_X$ , zbiór

$$\left\{ (x_1, \dots, x_N) \in X^N : \left( A \cap \bigcap_{i=1}^N (A + x_i) \right) \notin \mathcal{HM}_X \right\}$$

jest otoczeniem zera w przestrzeni produktowej  $X^N$ .

Jest to analogon wyniku J.P.R. Christensena i P. Fischera (1987), którzy zakładali, że  $A$  jest zbiorem uniwersalnie mierzalnym.

Ponadto dowodzi, że jeśli  $X$  jest polską grupą abelową,  $G$  jest jej zwartą podgrupą, to istnieje taki  $G$ -niezmienniczy zbiór  $F$  typu  $F_\sigma$  w  $X$ , że ani zbiór  $F$ , ani zbiór  $X \setminus F$  nie jest zbiorem pierwszej kategorii Haara, co jest odpowiednikiem twierdzenia P. Dodosa (2004) dla zbiorów zerowych Haara.

Korzystając z prac T. Banakha (2015), E. Matoškovéj i C. Stegalla otrzymuje następujące interesujące wnioski

- każda nierefleksywna ośrodkowa przestrzeń Banacha zawiera domknięty wypukły podzbiór o pustym wnętrzu, który nie jest pierwszej kategorii Haara;
- w każdej superrefleksywnej ośrodkowej przestrzeni Banacha wszystkie domknięte wypukłe zbiory nigdziegęste są pierwszej kategorii Haara.

W pracy [J1], nawiązującej do problemu postawionego przez K. Barona i R. Gera (1983), dowodzi, że każda funkcja jensensko wypukła określona na polskiej przestrzeni liniowej musi być wypukła, jeśli jest ograniczona z góry na pewnym mierzalnym w sensie Christensena zbiorze niezerowym Haara. Ma to oczywiste konsekwencje dla funkcji addytywnych. Przedstawiona dyskusja pokazuje, że ten fakt może być pomocny w rozwiązaniu powyższego problemu.

W pracy [J3], w polskiej grupie abelowej, wprowadza  $\sigma$ -ciało zbiorów  $\mathcal{D}$ -mierzalnych, które jest dobrą analogią  $\sigma$ -ciała zbiorów mierzalnych w sensie Christensena. Wykorzystując zbiory  $\mathcal{D}$ -mierzalne, pracy [J4] dowodzi odpowiednich analogonów twierdzenia Bernsteina-Doetscha dla funkcji wypukłych.

Zbiory  $\mathcal{D}$ -mierzalne wykorzystane są także w pracy [J2] poświęconej równaniu Gołąba-Schinzla.

#### Ocena rozprawy habilitacyjnej:

Omówione powyżej wyniki uzyskane przez Habilitantkę w cyklu prac [J1]-[J6] tworzą ważny wkład w rozważaną tematykę. Ich znaczenie potwierdzają przytoczone tutaj nowe interesujące wyniki oraz zarysowany projekt Jej współpracy naukowej. Tematyka cyklu prac jest spójna, a pozytywną cechą jest wyraźna rola wiążącego rezultatu.

Moją dobrą ocenę obniża nieco fakt, że w rozprawie w ogóle nie wspomina się wyniku Raikova (1939), silniejszego niż twierdzenie Steinhausa.

#### Ocena pozostałego dorobku naukowego

Dość dobrze wygląda pozostały dorobek naukowy składający się z 23 artykułów opublikowanych w większości w czasopismach z listy filadelfijskiej (Aequationes Mathematicae - 4; Journal of the Mathematical Analysis and Applications - 3; Bulletin of the Australian Mathematical Society - 3; Nonlinear Analysis - 1; Acta Mathematica Hungarica - 2, Publicationes Mathematicae Debrecen - 1). Dotyczą one głównie: równania funkcyjnego Gołąba-Schinzla, różnego typu jego uogólnień i odpowiedniej nierówności funkcyjnej; zagadnień stabilnościowych traktowanych przy pomocy teorii punktu stałego, oraz rozszerzalności warunkowych równań funkcyjnych.

Drobne uwagi natury krytycznej:

1. Stwierdzenie na str. 20 Autoreferatu o tym, że "Nierówność (24) jest szczególnym przypadkiem nierówności (25), która pojawia się w związku z funkcjami wypukłymi czy podaddytywnymi ..." jest chyba zbyt daleko idąca.

W przypadku funkcji wypukłych jak i podaddytywnych funkcje  $F$  i  $H$  są danymi funkcjami (niezależnymi od nieznannej funkcji  $f$ ); wydaje się, że w przypadku funkcji wypukłych, funkcje  $F$  i  $H$  powinny być średnimi; przydałby się w tym miejscu cytat pracy G. Aumann (1933).

W teorii funkcje podaddytywnych ważną rolę odgrywa twierdzenie Raikova. Przy słabszych założeniach niż u Steinhausa, wskazuje ono punkt wewnątrz sumy algebraicznej zbiorów, co jest szczególnie ważne w przypadku podaddytywności. Szkoda, że przy tej okazji (a także w części opisującej wyniki prac [J1]-[J6]), twierdzenie to nie jest przypomniane.

2. Autoreferat, str. 10 linie 10-11: przydałby się cytat przy stwierdzeniu: "Jedynym założeniem trywializującym szukanie rzeczywistych rozwiązań równania (5) jest różnowartościowość funkcji  $f$  ...".

3. Autoreferat, str. 13. Kładąc  $g := f^k$  w równaniu funkcyjnym (8) (lub (6)) widzimy, że  $g$  spełnia oryginalne równanie Gołąba-Schinzla. Brakuje komentarza wyjaśniającego dlaczego nie wystarczy rozważać oryginalnej wersji tego równania.

Pozytywną ocenę dorobku publikacyjnego potwierdzają: cytowania (wg bazy Mathematical Reviews: 102 w tym bez samocytowań 64; wg bazy Web of Science: 62 w tym 42 bez samocytowań; wg bazy Scopus: 67 w tym bez samocytowań 37); sumaryczny impact factor publikacji naukowych według listy Journal Citation Reports

(JCR), zgodnie z rokiem opublikowania: **12,045**; oraz indeks Hirscha (wg bazy Math. Review: **7**; wg baz Web of Science oraz Scopus: **5**).

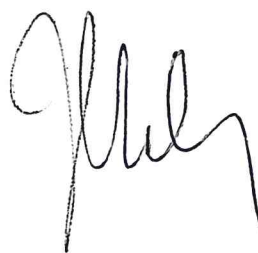
Przebywała na dwóch krótkich zagranicznych stażach naukowych i uczestniczyła aktywnie w 17 konferencjach naukowych. W roku 2014 otrzymała **Medal for outstanding contribution to the 52nd International Symposium on Functional Equations**.

Recenzowała publikacje dla następujących czasopism: Aequationes Mathematicae, Commentationes Mathematicae, Journal of Inequalities and Applications, Abstract and Applied Analysis, Demonstratio Mathematica, Mathematica Slovaca, Results in Mathematics, Annales Universitatis Pedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica, Topological Methods in Nonlinear Analysis. Ponadto jest recenzentem prac dla Mathematical Review.

W dorobku dydaktycznym ma skrypt dla studentów dotyczący rachunku papierów wartościowych i jeden artykuł popularno-naukowy. Była członkiem Komitetu Okręgowego Olimpiady Matematycznej oraz prowadziła zajęcia dla uzdolnionych matematycznie uczniów szkół średnich.

#### **Konkluzja:**

**Uważam, że recenzowana rozprawa habilitacyjna, dorobek naukowy oraz pozostałe osiągnięcia wypełniają wymagania Ustawy z dnia 18 marca 2011 r. o zmianie ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki oraz zmianie niektórych innych ustaw (Dz. U. Nr 84, poz. 455), i popieram wniosek o nadanie stopnia doktora habilitowanego dr Elizie Łucji Jabłońskiej.**

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Eliza Jablonska', written in a cursive style.