

**JULIUSZ GRABSKI
JAROSŁAW STRZAŁKO
BOGUMIŁ MIANOWSKI**

PODSTAWY MECHANIKI ANALITYCZNEJ

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
ŁÓDŹ 2016

**JULIUSZ GRABSKI
JAROSŁAW STRZAŁKO
BOGUMIŁ MIANOWSKI**

**PODSTAWY MECHANIKI
ANALITYCZNEJ**

Materiały do wykładów i ćwiczeń

**POLITECHNIKA ŁÓDZKA
ŁÓDZ 2016**

SKRYPTY DLA SZKÓŁ WYŻSZYCH

Recenzenci:

dr hab. inż. Przemysław Perlikowski, prof. PŁ
dr hab. inż. Henryk Kamiński

Redaktor Naukowy Wydziału Mechanicznego
prof. dr hab. inż. Tomasz Kapitaniak

© Copyright by Politechnika Łódzka 2016

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52
fax 42-631-25-38
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-753-0

Nakład 70 egz. Ark druk 15,0. Papier offset. 80 g, 70 x 100
Druk ukończono w czerwcu 2016 r.
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11
Nr 2170

Spis treści

Wykaz oznaczeń	6
Przedmowa	9
1 WPROWADZENIE.....	11
1.1 Mechanika newtonowska.....	14
1.2 Mechanika lagranżowska	19
1.3 Mechanika hamiltonowska.....	20
2 WIĘZY I ICH KLASYFIKACJA.....	23
2.1 Układy nieswobodne	23
2.2 Więzy dwustronne i jednostronne	23
2.2.1 Więzy dwustronne.....	24
2.2.2 Przykłady więzów dwustronnych	24
2.2.3 Więzy jednostronne	26
2.2.4 Przykłady więzów jednostronnych	26
2.3 Więzy geometryczne i kinematyczne	28
2.3.1 Więzy geometryczne	28
2.3.2 Przykłady więzów geometrycznych.....	29
2.3.3 Więzy kinematyczne	30
2.3.4 Przykłady więzów kinematycznych.....	31
2.3.5 Więzy kinematyczne całkowalne.....	32
2.4 Więzy reonomiczne i skleronomiczne.....	34
2.4.1 Więzy reonomiczne.....	34
2.4.2 Więzy skleronomiczne.....	36
2.5 Więzy idealne i przemieszczenia przygotowane.....	37
2.5.1 Przemieszczenia przygotowane	37

2.5.2	Więzy idealne	42
2.5.3	Przykłady więzów idealnych.....	44
3	RÓWNANIA DYNAMIKI I ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH WE WSPÓŁRZĘDNYCH KARTEZJAŃSKICH	55
3.1	Ogólne równanie dynamiki analitycznej.....	55
3.2	Zasada prac przygotowanych.....	60
3.2.1	Zadania do rozwiązania – zasada prac przygotowanych we współrzędnych kartezjańskich	68
3.3	Zasada d'Alemberta.....	71
3.4	Równania Lagrange'a I-go rodzaju.....	75
3.5	Reakcje więzów	81
4	OPIS RUCHU WE WSPÓŁRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH	93
4.1	Współrzędne uogólnione	93
4.2	Prędkości i przyspieszenia uogólnione	96
4.3	Uogólnione przemieszczenia przygotowane	97
4.4	Siły uogólnione	98
4.4.1	Praca przygotowana sił działających na ciało sztywne ..	100
4.5	Zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych	102
4.6	Równowaga w zachowawczym polu sił	115
4.6.1	Rodzaje równowagi.....	118
4.6.2	Zadania do rozwiązania – zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych; stateczność położenia równowagi.....	142
4.7	Równania Lagrange'a II-go rodzaju dla układów holonomicznych	148
4.7.1	Zadania do rozwiązania – równania Lagrange'a II-go rodzaju dla układów holonomicznych	162
5	WPROWADZENIE DO DYNAMIKI UKŁADÓW NIEHOLONOMICZNYCH.....	165
5.1	Równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla układów nieholonomicznych	165
5.1.1	Równania Lagrange'a drugiego rodzaju z mnożnikami .	167
5.1.2	Metoda eliminacji zależnych przemieszczeń przygotowanych z równania d'Alemberta – Lagrange'a....	179
5.2	Równania Maggi'ego dla układów nieholonomicznych.....	184

5.3	Równania Boltzmann-Hamela	190
5.3.1	Równania Boltzmann-Hamela w opisie ruchu kulistego	191
5.3.2	Zadania do rozwiązania – dynamika układów nieholonomicznych.....	195
6	DODATKI	203
A	Kinematyka ciała sztywnego	203
A.1	Prędkość punktów ciała sztywnego	204
A.2	Metody określania prędkości punktów ciała sztywnego	204
A.2.1	Metoda bieguna	205
A.2.2	Metoda środka chwilowego obrotu.....	206
A.2.3	Metoda rzutów prędkości	208
B	Energia kinetyczna ciała sztywnego	209
B.1	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu ogólnym	209
B.2	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu kulistym	211
B.3	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu płaskim	212
B.4	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym	213
C	Przykłady rozwiązań zadań przy użyciu komputera – system <i>wxMaxima</i>	215
C.1	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do rozwiązania układu równań algebraicznych	215
C.2	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do określenie położenia równowagi	218
C.3	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do badania stateczności.....	220
C.4	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do generowania równań dynamiki.....	222
	Bibliografia	225
	Spis rysunków	228
	Spis tabel	236
	Indeks	237

Wykaz oznaczeń¹

• Litery łacińskie duże

A, B, C, \dots	– oznaczenia punktów
$\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{W}}$	– wektory sił (zewnętrznych, reakcji, wewnętrznych)
F, P, R, W	– wartości sił (długości wektorów $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{W}}$)
F_x, F_y, F_z	– rzut siły ($\vec{\mathbf{F}}$) na osie x, y, z
$\vec{\mathbf{G}}$	– siła ciężkości (o wartości równej $G = mg$)
H	– funkcja Hamiltona (hamiltonian)
J_O	– masowy moment bezwładności względem punktu O
J_{lB}, J_{lC}	– masowe momenty bezwładności względem osi l , przechodzącej przez punkt B lub C
$J_{B\xi}, J_{B\eta}, J_{B\zeta}$	– masowe momenty bezwładności względem osi $\xi\eta\zeta$ o początku w punkcie B
$J_{B\xi\eta}, J_{B\eta\zeta}, J_{B\xi\zeta}$	– momenty dewiacyjne
$\vec{\mathbf{K}}_O$	– wektor krętu (punktu materialnego lub ciała sztywnego) względem punktu O
L	– całkowita praca sił
\mathcal{L}	– funkcja Lagrange'a (lagranżian)
$\vec{\mathbf{M}}_B, \vec{\mathbf{M}}_O$	– moment siły względem punktu B, O
N	– liczba punktów materialnych układu
$\vec{\mathbf{Q}}$	– wektor pędu (punktu materialnego, ciała sztywnego lub układu materialnego)
Q_k	– siła uogólniona odpowiadająca współrzędnej uogólnionej o numerze k
$\vec{\mathbf{S}}$	– wektor główny układu wektorów
T	– energia kinetyczna (punktu materialnego, ciała sztywnego lub układu materialnego)
V	– energia potencjalna

¹W wykazie podane zostały ważniejsze oznaczenia używane w tekście. W pewnych sytuacjach znaczenie niektórych symboli może być inne niż podano w tym zestawieniu. Wszelkie odstępstwa od podanego w wykazie sposobu oznaczeń zostały w pracy opatrzone odpowiednim komentarzem.

• Litery łacińskie małe

a, b, c, d, \dots	– długości odcinków i wektorów
$\vec{a}, \vec{a}_A, \vec{a}_B$	– wektor przyspieszenia punktu
a_x, a_y, a_z	– rzuty wektora przyspieszenia punktu na osie x, y, z
c	– współczynnik sztywności sprężyny
$d'L$	– elementarna praca siły
$d\vec{r}, d'\vec{r}$	– przemieszczenie możliwe punktu
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	– wektory jednostkowe układów współrzędnych
$\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$	– parametry (charakterystyki) kinematyczne
f, f_p	– funkcje skalarne (oznaczające równania więzów geometrycznych)
\vec{g}	– wektor przyspieszenia ziemskiego (g oznacza jego wartość)
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	– wersory osi układu współrzędnych prostokątnych
k	– liczba równań więzów geometrycznych
m	– masa (punktu materialnego, układu punktów, ciała sztywnego)
n	– liczba stopni swobody układu
p_i	– pęd uogólniony (pęd kanoniczny)
q, q_k	– współrzędna uogólniona (niezależna)
r	– liczba równań więzów kinematycznych
$\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_{BA}, \vec{r}_{OB}$	– wektory określające położenie punktów
t	– czas
$\vec{v}, \vec{v}_A, \vec{v}_B$	– wektor prędkości punktu (v oznacza długość tego wektora)
v_x, v_y, v_z	– rzuty wektora prędkości punktu na osie x, y, z
v_B, v_C	– wartość wektora prędkości punktu
w_1, w_2, \dots	– quasi prędkości
x_A, y_A, z_A	– współrzędne wybranego punktu (A)
x, y, z	– współrzędne prostokątne punktu (lub osie prostokątnego układu współrzędnych)

• Litery greckie

- α, β, γ – kąty pomiędzy dwoma wektorami, dwiema prostymi lub płaszczyznami (przy opisie położenia wektora, oznaczają kąty skierowane pomiędzy osiami x, y i z a wektorem)
- δL – praca przygotowana sił
- $\delta \vec{r}$ – wektor przemieszczenia przygotowanego
- $\delta x, \delta y, \delta z$ – składowe wektora przemieszczenia przygotowanego
- $\delta q, \delta q_k$ – uogólnione przemieszczenia przygotowane
- λ_p – mnożniki Lagrange'a
- μ_s – mnożniki Lagrange'a
- $\vec{\epsilon}$ – wektor przyspieszenia kąтового ciała
- ϵ – wartość wektora przyspieszenia kąтового ciała (w ruchu płaskim ciała $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$)
- ξ, η, ζ – osie ruchomego układu współrzędnych sztywno związanego z ciałem
- ρ – promień krzywizny toru (albo masa właściwa ciała)
- $\tau, \eta, (\eta_b)$ – oś styczna oraz oś normalna (i binormalna) do toru poruszającego się punktu
- θ, φ – kąty opisujące orientację ciała w przestrzeni (kąty Eulera)
- $\vec{\omega}$ – wektor prędkości kątovej ciała
- ω – wartość wektora prędkości kątovej ciała (w ruchu płaskim ciała $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$)
- $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ – rzuty wektora prędkości kątovej ciała na ruchome osie $\xi\eta\zeta$ sztywno związane z ciałem

Przedmowa

Mechanika analityczna jest propozycją innego opisu dynamiki ciał niż znany wcześniej sposób, polegający na bezpośrednim użyciu praw dynamiki Newtona. Nowe podejście do mechaniki, zaproponowane przez J. Lagrange'a i nazwane mechaniką analityczną, jest o sto lat późniejsze od mechaniki newtonowskiej, ale jedno i drugie zaliczane jest już do klasyki.

Klasyczne metody mechaniki analitycznej koncentrują się na badaniu dynamiki nieswobodnych układów punktów materialnych i ciał sztywnych. Jeśli ograniczamy się do metod i narzędzi z czasów, gdy mechanika była królową nauk, to rozwiązanie wielu zadań jest trudne, a często wręcz niemożliwe.

W podręcznikach poświęconych mechanice analitycznej przedstawiany jest szeroki wachlarz metod konstruowania równań opisujących ruch układów materialnych i ciał sztywnych. Większość zadań jest jednak dobierana w taki sposób, by możliwe było znalezienie rozwiązania analitycznego. Z drugiej strony wymagania współczesnej techniki zmuszają do analizy złożonych układów i prowadzą do zadań, dla których nie daje się znaleźć rozwiązania ścisłego i jednym ze sposobów jest analiza numeryczna przy pomocy komputera.

Trudności wiążące się z bezpośrednim wykorzystaniem metod mechaniki klasycznej, a także szeroki dostęp do komputerów, rozwój metod analizy numerycznej i bogactwo oprogramowania, wymusiły zmianę w sposobie formułowania zadań typowych dla dynamiki układów mechanicznych.

Fakty te powodują, że konieczna jest modyfikacja programu mechaniki analitycznej na studiach technicznych i przedstawienie nowych sposobów formułowania zadań mechaniki oraz metod pozwalających na otrzymanie rozwiązania przy pomocy komputera (przy czym chodzi zarówno o rozwiązania numeryczne, jak i analityczne).

Celem założonym przy opracowywaniu tego skryptu było pokazanie możliwości wykorzystania metod mechaniki analitycznej do analizy równowagi i ruchu układów mechanicznych z użyciem komputera. Materiał zawarty w skrypcie jest dostosowany do aktualnego programu studiów II stopnia na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej. Zrozumienie i przyswojenie podstaw mechaniki analitycznej ma ułatwić absolwentom studiowanie i stosowanie innych, bardziej zaawansowanych metod (takich jak równania Hamiltona, Kane'a, Gibbsa, czy metoda projekcyjna), używanych w zagadnieniach dynamiki i sterowania układów wielocłonowych.

W skrypcie zostały zamieszczone przykłady rozwiązań zadań dotyczących omawianych zagadnień. Niektóre z nich zawierają również wyniki numerycznych rozwiązań otrzymywanych równań. Zadania zostały rozwiązane przy użyciu pakietów programów matematycznych, takich jak *Mathematica* czy *Maxima* (pozwalają one na uzyskanie rozwiązań na drodze analitycznej bądź numerycznej).

Należy zwrócić uwagę, że do rozwiązania wielu zadań przy wykorzystaniu tego rodzaju oprogramowania nie jest konieczne generowanie równań ruchu w jawnej postaci. Przedstawienie algorytmu rozwiązania i wykorzystanie możliwości wykonywania operacji symbolicznych przez te programy wystarcza do otrzymania ostatecznych rezultatów.

Materiał zawarty w tym skrypcie nie zawiera informacji dotyczących programów komputerowych używanych przy rozwiązywaniu zadań ani metod numerycznych wykorzystywanych w tych pakietach. Umiejętność korzystania z oprogramowania i dokładna znajomość programów nie są konieczne do zrozumienia przedstawionych tu treści.

Na ostateczny kształt tej pracy znaczący wpływ mieli autorzy recenzji – profesorowie Henryk Kamiński z Politechniki Poznańskiej i Przemysław Perlikowski z Politechniki Łódzkiej. Tą drogą chcemy serdecznie podziękować Recenzentom za wszystkie uwagi, sugestie i rady jakie od Nich dostaliśmy.

Autorzy (Łódź, styczeń 2016)

Rozdział 1

WPROWADZENIE

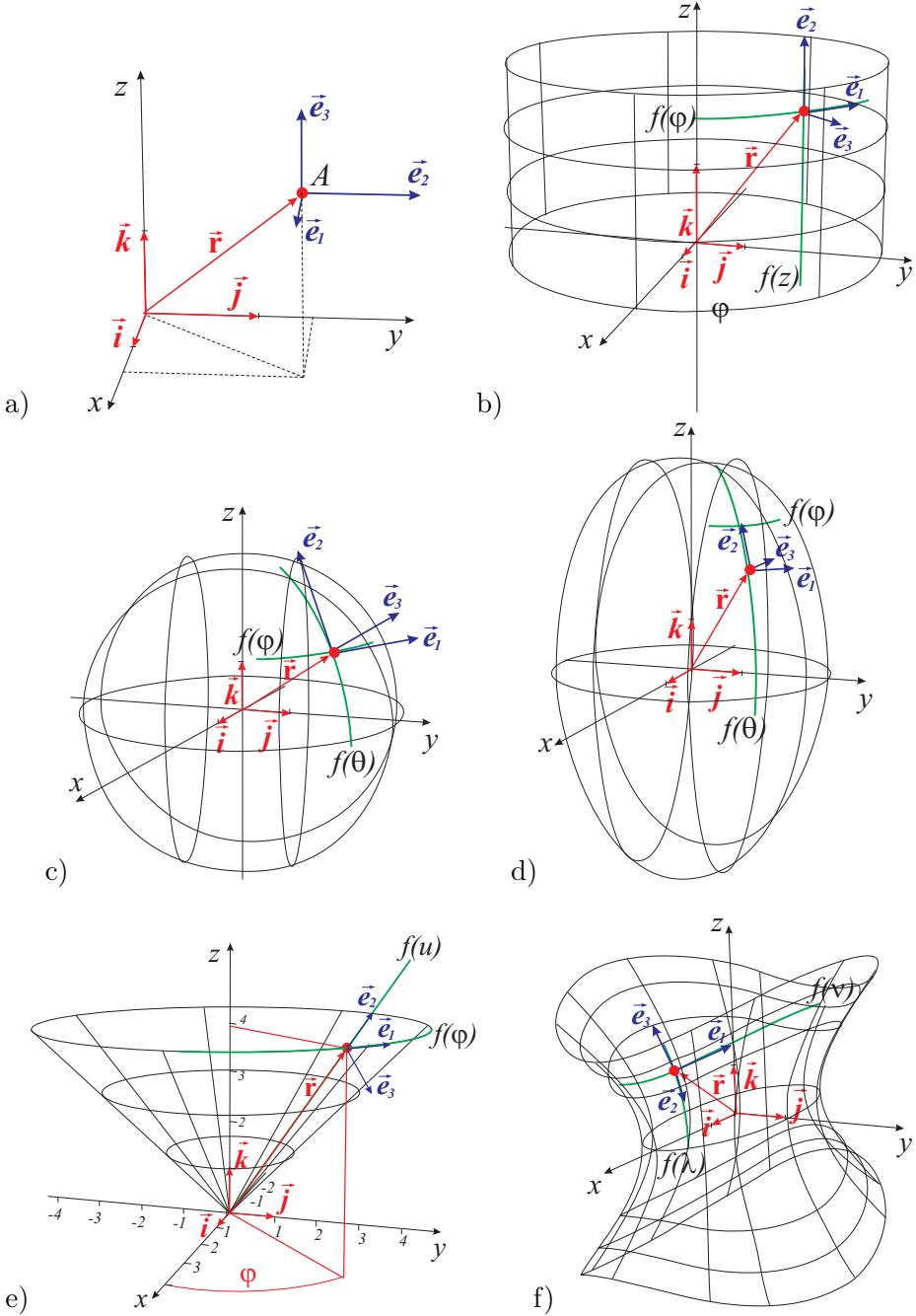
Przedmiotem mechaniki jest opis ruchu ciał¹ i układów złożonych z ciał². Możliwe są różne sposoby formułowania zadań rozpatrywanych w mechanice. Różnice wynikają z wykorzystania innego aparatu matematycznego (np. równania różniczkowe, rachunek wariacyjny, równania całkowe), a także z użycia różnego rodzaju współrzędnych.

W literaturze przedmiotu [2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 32, 22, 24, 25, 33, 27, 28] spotyka się szereg różnych nazw określających współrzędne przyjmowane dla przedstawienia położenia układu w dowolnej chwili (stosowane są współrzędne: uogólnione i naturalne, absolutne i względne, zależne i niezależne, nadmiarowe albo dodatkowe, przegubowe lub węzłowe, quasi-współrzędne). W opisie ruchu używane są również ogólniejsze pojęcia – współrzędne stanu, parametry kinematyczne czy quasi-prędkości.

Wybór współrzędnych związany jest z rozwiązywanym zadaniem. Do jednoznacznego określenia położenia obiektu geometrycznego (punktu, ciała) konieczna jest pewna liczba współrzędnych odmierzanych w określony sposób. Najprostszy układ współrzędnych, gdzie odległości mierzone są wzdłuż prostopadłych do siebie osi to współrzędne kartezjańskie prostokątne. W geometrii analitycznej wprowadza się inne układy współrzędnych (krzywoliniowych – jak walcowe albo cylindryczne, kuliste lub sferyczne, paraboliczne, itp. – rys. 1.1), o własnościach pozwalających na znalezienie prostych rozwiązań niektórych problemów.

¹Szczególnym przypadkiem ruchu ciał jest stan spoczynku – opis położenia i sił działających na nieruchome ciało to część mechaniki nazywana statyką.

²W mechanice klasycznej nie bada się ruchu ciał rzeczywistych, a jedynie ich modeli – w postaci punktów materialnych lub ciał sztywnych.



Rysunek 1.1: Układy współrzędnych i ich wektory jednostkowe: a) prostoliniowy prostokątny (kartezjański), b) walcowy (cylindryczny), c) kulisty (sferyczny), d) elipsoidalny, e) stożkowy, f) hiperboloidalny

Do opisu ruchu punktu wygodne jest użycie kartezjańskiego układu współrzędnych – jest to naturalny sposób określenia położenia punktu czy układu złożonego z wielu punktów. Można też użyć współrzędnych krzywoliniowych – walcowych, kulistych lub jeszcze innych (rys. 1.1).

W przypadku modeli składających się z brył sztywnych wygodnie jest opisywać ruch ciała nieodkształcalnego przez określenie położenia układu współrzędnych związanego z tym ciałem, to znaczy za pomocą współrzędnych kartezjańskich wybranego punktu ciała sztywnego oraz kątów obrotu osi związanych z bryłą (względem przyjętego układu odniesienia). W ogólnym przypadku ruchu – w przestrzeni trójwymiarowej – jest to sześć współrzędnych – trzy translacyjne i trzy rotacyjne. Tak wybrane współrzędne są nazywane współrzędnymi naturalnymi³. Przy rozpatrywaniu ruchu w przestrzeni dwuwymiarowej (ruch płaski ciała) zmieniają się trzy współrzędne – dwie translacyjne i jedna określająca kąt obrotu.

W ramach mechaniki klasycznej wyodrębnić można:

- mechanikę newtonowską,
- mechanikę lagranżowską,
- mechanikę hamiltonowską.

Różniące się od siebie powyższe trzy sformułowania mechaniki są sobie równoważne i pozwalają na przejście od jednej teorii do dwu pozostałych. (Jeśli przyjmując jako założenie wyjściowe prawa dynamiki Newtona, to na ich podstawie można wyprowadzić równania Lagrange’a i Hamiltona. Można też postąpić inaczej i założyć, że prawdziwe są równania Hamiltona, a na ich podstawie udowodnić prawa Newtona.)

Przedmiotem rozważań zawartych w tej pracy jest mechanika analityczna w ujęciu Lagrange’a. Mechanika newtonowska i hamiltonowska są jedynie krótko scharakteryzowane we wprowadzeniu celem wskazania różnic i związków pomiędzy tymi teoriami.

Ewolucja mechaniki klasycznej i jej uogólnienie doprowadziło do powstania mechaniki kwantowej (zajmującej się badaniem obiektów o bardzo małych masach i rozmiarach, np. atomy, cząstki elementarne), mechaniki relatywistycznej (opisującej ruch ciał poruszających się z prędkościami bliskimi prędkości światła), a wreszcie do relatywistycznej mechaniki kwantowej. Takie zagadnienia nie są jednak omawiane w tym opracowaniu.

³Nazwa *naturalny układ współrzędnych* w geometrii różniczkowej odnosi się do układu osi stycznej, normalnej głównej oraz binormalnej. Naturalny układ osi współrzędnych jest stosowany w mechanice do opisu punktu poruszającego się po krzywej. W tej pracy termin *współrzędne naturalne* używany jest dla określenia takich współrzędnych, które opisują położenia ciał analizowanego układu poprzez translacje i obroty, a położenie punktów za pomocą współrzędnych kartezjańskich prostokątnych.

W mechanice klasycznej obowiązuje zasada determinizmu, która oznacza, że zarówno położenie, jak i prędkość (czy przyspieszenie) mogą być jednoznacznie określone. Inaczej jest w mechanice kwantowej, gdzie nie można jednocześnie określić dokładnego położenia oraz prędkości cząstki, a jedynie jedną z tych wielkości (zasada nieoznaczoności).

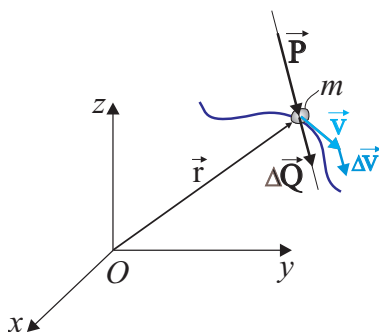
1.1 Mechanika newtonowska

Mechanika newtonowska jest oparta na kilku założeniach⁴, wśród których kluczowe było stwierdzenie:

”Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur”,

– co w tłumaczeniu z łaciny na polski znaczy:

”Zmiana ilości ruchu (zmiana pędu) jest proporcjonalna względem siły działającej i ma kierunek prostej, wzdłuż której ta siła działa.”



Rysunek 1.2: Swobodny punkt materialny o masie m , wypadkowa działających sił (\vec{P}), prędkość (\vec{v}) oraz zmiany prędkości ($\Delta\vec{v}$) i pędu ($\Delta\vec{Q}$)

Wielkości występujące w tak przedstawionym prawie dynamiki (wypadkowa sił \vec{P} , prędkość punktu \vec{v} , zmiana prędkości $\Delta\vec{v}$ i zmiana pędu $\Delta\vec{Q}$) są pokazane na rys. 1.2.

⁴Isaac Newton w 1687 roku opublikował *Philosophiae naturalis principia mathematica*, w których przedstawił podstawowe założenia mechaniki. Takie sformułowanie mechaniki było możliwe w końcu XVII wieku, po tym jak I. Newton (i niezależnie od niego G. Leibnitz) opracowali podstawy rachunku różniczkowego i całkowego.

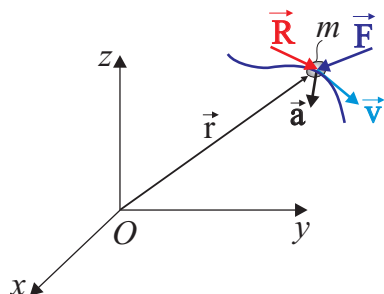
Współcześnie używane jest nieco inne sformułowanie II prawa dynamiki Newtona.

- **Przyspieszenie punktu materialnego ma wartość proporcjonalną do wartości siły działającej na ten punkt oraz kierunek i zwrot siły.**

Drugie prawo Newtona można przedstawić w postaci wzoru:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P} \quad \text{lub} \quad m\vec{a} = \vec{P}, \quad (1.1)$$

gdzie: \vec{Q} – pęd punktu ($\vec{Q} = m\vec{v}$), m – masa punktu, \vec{v} – prędkość punktu, $\vec{P} = \vec{F} + \vec{R}$ – wypadkowa sił zewnętrznych czynnych i reakcji działających na punkt materialny, \vec{a} – przyspieszenie punktu (rys. 1.3).



Rysunek 1.3: Nieswobodny punkt materialny o masie m , siły czynne (\vec{F}) i reakcji (\vec{R}) oraz prędkość (\vec{v}) i przyspieszenie (\vec{a})

Na podstawie przyjętych założeń – znanych z przedmiotu mechanika ogólna czy mechanika techniczna – w mechanice newtonowskiej formułuje się prawa ruchu dla układu punktów materialnych i ciał sztywnych.

Podstawowymi zależnościami używanymi w opisie ruchu punktu, układu punktów materialnych i ciał sztywnych są: prawo zmienności pędu, prawo zmienności krętu (momentu pędu) i prawo zmienności energii kinetycznej. Prawo opisujące zmiany masy ciała w mechanice klasycznej sprowadza się do założenia, że masa punktu, układu punktów czy ciała nie ulega zmianie⁵.

⁵W mechanice rozpatrywane są także układy otwarte, w których podczas ruchu masa nie jest stała (dynamika układów o zmiennej masie).

Prawa zmiany pędu dla punktu materialnego, układu punktów materialnych i ciała sztywnego można przedstawić w jednolitej formie.

- **Pochodna pędu jest proporcjonalna do wektora głównego (sumy wektorów) wszystkich sił zewnętrznych \vec{P} (czynnych \vec{F}_i i sił reakcji \vec{R}_j)**

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P} \quad (\text{lub} \quad m\vec{a}_C = \vec{P}) , \quad (1.2)$$

– dla układu n punktów materialnych (rys. 1.4a):

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i , \quad (1.3)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{R}_j, \quad \left(\sum_{i=1}^n \vec{W}_i = \vec{0} \right) , \quad (1.4)$$

(suma wszystkich sił wewnętrznych układu \vec{W}_i jest równa zero),

– dla ciała sztywnego (rys. 1.4b):

$$\vec{Q} = \int_V \vec{v} \rho dV = m \vec{v}_C, \quad m = \int_V \rho dV , \quad (1.5)$$

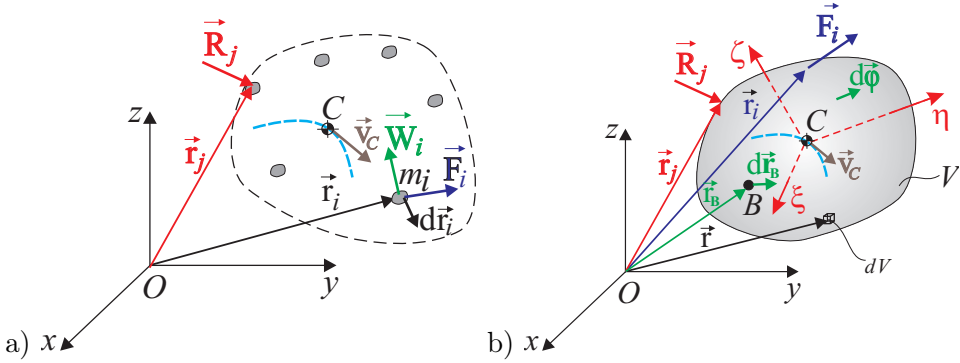
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^l \vec{R}_j , \quad (1.6)$$

przy czym punkt C jest środkiem masy układu lub ciała.

Prawa zmiany krętu dla punktu materialnego, układu punktów materialnych i ciała sztywnego można przedstawić w jednakowej postaci.

- **Pochodna krętu określonego względem nieruchomego punktu O jest proporcjonalna do momentu głównego (sumy momentów) wszystkich sił czynnych (\vec{F}_i) i sił reakcji (\vec{R}_j) względem bieguna O**

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O , \quad (1.7)$$



Rysunek 1.4: Układ punktów materialnych (a) i ciało sztywne (b): siły zewnętrzne czynne (\vec{F}_i) i reakcji (\vec{R}_j) oraz siły wewnętrzne (\vec{W}_i), prędkość środka masy (\vec{v}_C), elementarne przemieszczenie punktu B ($d\vec{r}_B$)

– dla punktu materialnego (rys. 1.3):

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P}, \quad \vec{P} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (1.8)$$

– dla układu punktów materialnych (rys. 1.4a):

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \quad (1.9)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{R}_j, \quad \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{W}_i = \vec{0} \right), \quad (1.10)$$

– dla ciała sztywnego (rys. 1.4b):

$$\vec{Q} = \int_V \vec{v} \rho dV = m \vec{v}_C. \quad (1.11)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^l \vec{r}_j \times \vec{R}_j. \quad (1.12)$$

Prawa zmiany energii kinetycznej dla punktu materialnego, układu punktów materialnych i ciała sztywnego można przedstawić w analogicznej formie.

• **Prawo zmiany elementarnej energii kinetycznej układu**

Zmiana elementarnej energii kinetycznej (dT) układu materialnego jest równa sumie elementarnych prac⁶ ($d'L$) wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych – działających na rozpatrywany układ

$$dT = d'L, \quad d'L = d'L_F + d'L_R + d'L_W, \quad (1.13)$$

przy czym:

– dla punktu materialnego (rys. 1.3):

$$T = \frac{1}{2} mv^2, \quad (1.14)$$

$$d'L = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{R}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}, \quad (1.15)$$

– dla układu punktów materialnych (rys. 1.4a):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2, \quad (1.16)$$

$$d'L = \sum_{i=1}^n (\vec{\mathbf{F}}_i \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{W}}_i \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i) + \sum_{j=1}^n \vec{\mathbf{R}}_j \cdot d\vec{\mathbf{r}}_j, \quad (1.17)$$

– dla ciała sztywnego⁷ (rys. 1.4b):

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV, \quad (1.18)$$

$$d'L = (\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{R}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}_B + (\vec{\mathbf{M}}_B(\vec{\mathbf{F}}) + \vec{\mathbf{M}}_B(\vec{\mathbf{R}})) \cdot d\vec{\varphi} \quad (1.19)$$

($d\vec{\mathbf{r}}_B$ oznacza elementarne przemieszczenie punktu B , do którego redukowane są siły, a $d\vec{\varphi}$ jest wektorem elementarnego obrotu ciała).

⁶Do oznaczenia elementarnej pracy siły używany jest symbol $d'L$, gdzie dodanie apostrofu (') ma wskazywać, że praca elementarna nie jest tożsama z różniczką zupełną dL .

⁷Szczegółowe wzory umożliwiające wyznaczenie energii kinetycznej ciała sztywnego są przedstawione w Dodatku B (s. 209).

1.2 Mechanika lagranżowska

Mechanika lagranżowska jest podejściem równoważnym do mechaniki newtonowskiej⁸, które polega na wprowadzeniu do opisu ruchu ciał innych współrzędnych niż kartezjańskie (charakterystyczne dla mechaniki Newtona), a mianowicie współrzędnych uogólnionych.

Współrzędne uogólnione są to niezależne współrzędne jednoznacznie określające położenie układu. Oznaczane są zwykle symbolami: q_1, q_2, \dots, q_n , a ich liczba (n) jest równa najmniejszej liczbie współrzędnych niezbędnych do opisanego ruchu układu.

Pochodne współrzędnych uogólnionych $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ są nazywane prędkościami uogólnionymi, przy czym prędkości te mogą być od siebie niezależne (układ holonomiczny) lub zależne. W takich przypadkach, gdy pomiędzy prędkościami uogólnionymi zachodzą związki (wynikające z nałożonych więzów) i są to związki niecałkowalne, układ określany jest jako nieholonomiczny.

Centralnym równaniem mechaniki lagranżowskiej jest formuła zwana równaniem d'Alemberta – Lagrange'a o następującej budowie

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \quad (1.20)$$

gdzie: T oznacza całkowitą energię kinetyczną rozpatrywanego układu, Q_k – siły uogólnione, δq_k – uogólnione przemieszczenia przygotowane (wariacje współrzędnych uogólnionych).

Dla układów szczególnego rodzaju – takich, że siły uogólnione (Q_k) mo

– korzysta się z równania

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0, \quad (1.21)$$

przy czym wielkość określoną jako $\mathcal{L} = T - V$ nazywa się funkcją Lagrange'a (lub lagranżjanem).

Równania (1.20) i (1.21) są podstawą do analizy dynamiki układów holonomicznych, jak i nieholonomicznych, a także mogą być wykorzystane do badania układów w stanie spoczynku (statyka analityczna). Umożliwiają one

⁸Podstawowa praca poświęcona innemu podejściu do mechaniki *Mécanique analytique* została opublikowana przez J. Lagrange'a w 1788 r.

generowanie równań dynamiki (albo równań równowagi) układów, których ruch jest opisany przy użyciu współrzędnych uogólnionych zamiast współrzędnych kartezjańskich (wykorzystywanych w mechanice newtonowskiej).

Bardziej szczegółowy opis mechaniki zaproponowanej przez Lagrange'a jest przedstawiony w rozdziałach 4 i 5 tej pracy.

Wprowadzeniem do zagadnień mechaniki lagranżowskiej są rozdziały 2 i 3. Rozdział 2 zawiera analityczny opis ograniczeń nałożonych na ruch układu – przedstawione są różne rodzaje więzów i ich klasyfikacja. Oparte na rachunku wariacyjnym równania dynamiki we współrzędnych kartezjańskich są omawiane w rozdziale 3.

1.3 Mechanika hamiltonowska

Mechanika hamiltonowska jest – tak jak i mechanika w ujęciu Lagrange'a – podejściem równoważnym do mechaniki newtonowskiej.

W opisie opracowanym przez W. Hamiltona (w 1834 r.) kluczową rolę odgrywa hamiltonian albo inaczej funkcja Hamiltona (H)

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (1.22)$$

przy czym \mathcal{L} jest funkcją Lagrange'a, natomiast p_i oznacza pęd uogólniony⁹ (lub pęd kanoniczny) i jest zdefiniowany jako

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.23)$$

Układ równań:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.24)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i, \quad (1.25)$$

⁹W punkcie dotyczącym mechaniki newtonowskiej pęd oznaczony jest symbolem Q i jest określony poprzez składowe kartezjańskie prędkości ($\vec{v}_i = \dot{x}_i \vec{i} + \dot{y}_i \vec{j} + \dot{z}_i \vec{k}$). W równaniach Hamiltona tradycyjnie używany symbol pędu to p_i . Pęd uogólniony (p_i) jest wyrażony poprzez prędkości uogólnione (\dot{q}_i).

jest nazywany układem równań Hamiltona. Pozwala on na opis ruchu układów holonomicznych – otrzymuje się z niego układ równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Różnica pomiędzy formalizmem Lagrange'a a Hamiltona polega na użyciu pędów uogólnionych (p_i) zamiast prędkości uogólnionych (\dot{q}_i). Przestrzeń współrzędnych (q_n, p_n) nazywa się przestrzenią fazową. W odróżnieniu od niej, przestrzeń zmiennych Lagrange'a (q_n, \dot{q}_n) jest określana jako przestrzeń położenia i prędkości uogólnionych.

Równania Hamiltona odgrywają ważną rolę w wielu zagadnieniach fizyki i astrofizyki. Podejście to pozwala między innymi na przejście od mechaniki klasycznej do mechaniki kwantowej.

Rozdział 2

WIĘZY I ICH KLASYFIKACJA

2.1 Układy nieswobodne

Na położenia i prędkości punktów układu mogą być nałożone pewne ograniczenia o charakterze geometrycznym lub kinematycznym (położenia i prędkości muszą spełniać pewne warunki, niewynikające z równań ruchu). Ograniczenia te zwane są więzami. Związki analityczne opisujące te warunki nazywają się równaniami więzów. Układy z więzami nazywają się nieswobodnymi w odróżnieniu od układów swobodnych, które nie podlegają żadnym więzom.

Klasyfikacja więzów może być przeprowadzona na wiele sposobów. Zależy to od tego, które elementy występujące w związkach analitycznych będą brane pod uwagę.

2.2 Więzy dwustronne i jednostronne

Za podstawę do klasyfikacji przyjęto postać zależności analitycznej określającej więzy. Umówiono się, że więzy w postaci równań będą nazywane dwustronnymi, a jeżeli związki będą miały postać nierówności, to więzy będą nazywane jednostronnymi.

2.2.1 Więzy dwustronne

Więzy dwustronne można określić analitycznie w postaci równania

$$f_p \left(t, \vec{\mathbf{r}}_1, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1, \dots, \vec{\mathbf{r}}_N, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_N \right) \equiv f_p \left(t, \vec{\mathbf{r}}_i, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i \right) = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (2.1)$$

gdzie k oznacza liczbę niezależnych i niesprzecznych związków analitycznych, które mogą być funkcjami czasu t , wektorów wodzących $\vec{\mathbf{r}}_i$ określających położenie i wektorów prędkości $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt}$ punktów P_i . O funkcjach f_p zakłada się, że są one ciągle wraz ze swoimi pierwszymi i drugimi pochodnymi. Wszystkie wektory wodzące występujące w równaniach (2.1) wychodzą z tego samego nieruchomego punktu. Należy zdawać sobie sprawę, że przedstawiony zapis, gdzie funkcja f_p zależy od wektorów $\vec{\mathbf{r}}_i$ i $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i$, jest oznaczeniem skrótowym. W rzeczywistości tylko w nielicznych przypadkach da się zapisać w sposób jawny równania więzów w zależności od wektorów wodzących. Najczęściej wprowadza się współrzędne ortogonalne. Jeżeli wprowadzi się kartezjańskie współrzędne punktu $P_i (x_i, y_i, z_i)$, to związki określające więzy mają postać:

$$f_p \left(t, x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N \right) \equiv \\ \equiv f_p \left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i \right) = 0, \quad (p = 1, \dots, k). \quad (2.2)$$

Ograniczenia nałożone na ruch punktów o postaci (2.1) lub (2.2) nazywają się więzami dwustronnymi.

2.2.2 Przykłady więzów dwustronnych

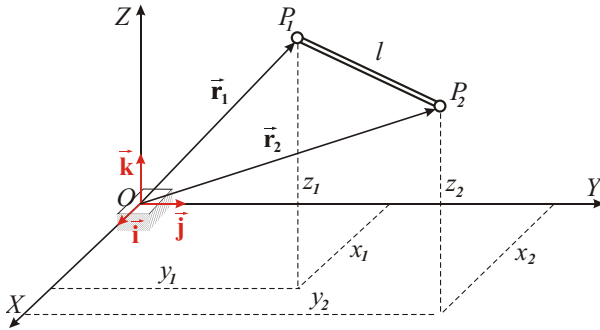
Przykład 2.2.1. Dwa punkty materialne są połączone prętem o stałej długości l . Podać równanie więzów dla tego układu.

Wprowadzając promienie wektory $\vec{\mathbf{r}}_1$ i $\vec{\mathbf{r}}_2$ określające położenie punktów P_1 i P_2 (rys. 2.1), otrzymujemy równanie więzów w postaci

$$f \equiv (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) - l^2 = 0.$$

We współrzędnych prostokątnych $OXYZ$ (rys. 2.1) związki analityczne określające więzy można przedstawić jako

$$f \equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0.$$



Rysunek 2.1: Punkty połączone nieodkształcalnym prętem – wektory wodzące i współrzędne prostokątne

Z postaci obu zależności wynika, że są to więzy dwustronne.

Przykład 2.2.2. Punkt materialny ma jednocześnie pozostawać na dwóch powierzchniach (np. elipsoidy i płaszczyzny). Napisać równania więzów.

Zapisanie ograniczeń wymaga w tym przypadku wprowadzenia współrzędnych prostokątnych. Możemy to zapisać następująco:

$$f_1 \equiv a_1^2 x^2 + b_1^2 y^2 + c_1^2 z^2 - d_1^2 = 0 ,$$

$$f_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 ,$$

a więc nałożone więzy są dwustronne.

Przykład 2.2.3. Punkt materialny ma poruszać się ze stałą co do wartości prędkością. Przedstawić równania więzów.

Warunek ten możemy zapisać w postaci zależności

$$f_1 \equiv \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - v_0^2 = 0$$

lub – po wprowadzeniu współrzędnych kartezjańskich – jako

$$f_1 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - v_0^2 = 0 .$$

Są to również więzy dwustronne, a nałożone ograniczenie dotyczy prędkości.

2.2.3 Więzy jednostronne

Związki analityczne opisujące ograniczenia nałożone na ruch punktów mogą mieć charakter nierówności o postaci

$$f_p(t, \vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_N) \equiv f_p(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \geq 0, \quad (p = 1, \dots, k) \quad (2.3)$$

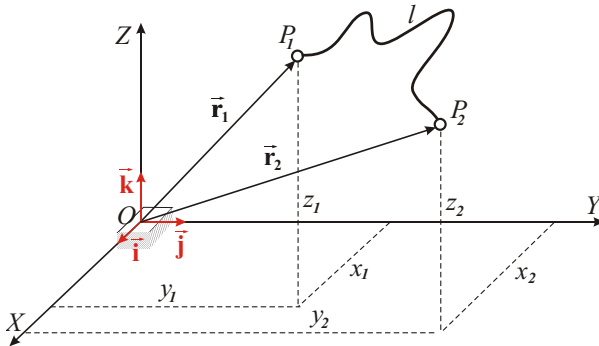
lub we współrzędnych kartezjańskich

$$\begin{aligned} f_p(t, x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) \equiv \\ \equiv f_p(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) \geq 0, \quad (p = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ograniczenia ruchu punktów wynikające ze związków o postaci (2.3) lub (2.4) są nazywane więzami jednostronnymi.

2.2.4 Przykłady więzów jednostronnych

Przykład 2.2.4. Dwa punkty materialne są połączone nierozciągliwą nicią o długości l . Opisać więzy za pomocą związków analitycznych.



Rysunek 2.2: Punkty połączone nierozciągliwą nicią

W tym przypadku związki określające więzy mają postać (rys. 2.2):

$$f \equiv (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - l^2 \leq 0,$$

a we współrzędnych prostokątnych

$$f \equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 \leq 0.$$

Z obu zależności wynika, że są to więzy jednostronne.

Przykład 2.2.5. Punkt materialny ma pozostawać wewnątrz prostopadłościanu o wymiarach a, b, c . Napisać równanie więzów.

Współrzędne punktu muszą spełniać warunki:

$$f_1 \equiv x \geq 0, \quad f_2 \equiv a - x \geq 0,$$

$$f_3 \equiv y \geq 0, \quad f_4 \equiv b - y \geq 0,$$

$$f_5 \equiv z \geq 0, \quad f_6 \equiv c - z \geq 0,$$

są to więzy jednostronne.

Przykład 2.2.6. Punkt materialny ma poruszać się z prędkością o wartości nie mniejszej od "dopuszczalnej", która wynosi v_0 . Określić rodzaj więzów.

Ograniczenie to możemy zapisać w postaci zależności

$$f_1 \equiv \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - v_0^2 \geq 0$$

lub w układzie współrzędnych prostokątnych:

$$f_1 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - v_0^2 \geq 0.$$

Są to więzy jednostronne (ograniczenie dotyczy prędkości).



Na zakończenie należy zwrócić uwagę na ważne różnice między więzami dwustronnymi i jednostronnymi:

- liczba więzów dwustronnych jest ograniczona,
- liczba więzów jednostronnych nie jest ograniczona,

- więzy dwustronne stale nakładają ograniczenia na położenia i ruch punktów,
- więzy jednostronne nakładają ograniczenia na położenia i ruch punktów tylko wówczas, gdy są napięte (znak nierówności zmienia się na znak równości).

Praktycznie ruch układu podległego więzom jednostronnym można rozbić na etapy:

- pierwszy taki, w którym więzy są napięte i ruch odbywa się tak, jak gdyby więzy były dwustronne
- i drugi, kiedy więzy są nienapięte i ruch odbywa się tak, jak gdyby tych więzów nie było.

2.3 Więzy geometryczne i kinematyczne

W związkach analitycznych opisujących ograniczenia ruchu mogą nie występować pochodne względem czasu wektorów wodzących punktów

$$f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_1, \dots, \vec{\mathbf{r}}_N) \equiv f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k) \quad (2.5)$$

lub też mogą występować

$$f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_1, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1, \dots, \vec{\mathbf{r}}_N, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_N) \equiv f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_i, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k). \quad (2.6)$$

Według tego kryterium klasyfikacji więzów, więzy opisane równaniem (2.5) są więzami geometrycznymi (skończonymi), a opisane równaniem (2.6) więzami kinematycznymi (różniczkowymi).

2.3.1 Więzy geometryczne

W przypadku gdy prędkość $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i$ nie występuje w równaniach więzów (2.5), więzy nazywają się geometrycznymi lub skończonymi. Analitycznie zapisuje się je wtedy następująco:

$$f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k; i = 1, \dots, N) \quad (2.7)$$

lub

$$f_p(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad (p = 1, \dots, k). \quad (2.8)$$

Klasycznym przykładem więzów geometrycznych dla układu punktów materialnych są ograniczenia, nałożone na wzajemne położenie punktów, wynikające z definicji ciała sztywnego.

Układ, na który nałożone są więzy geometryczne jest nazywany układem holonomicznym.

2.3.2 Przykłady więzów geometrycznych

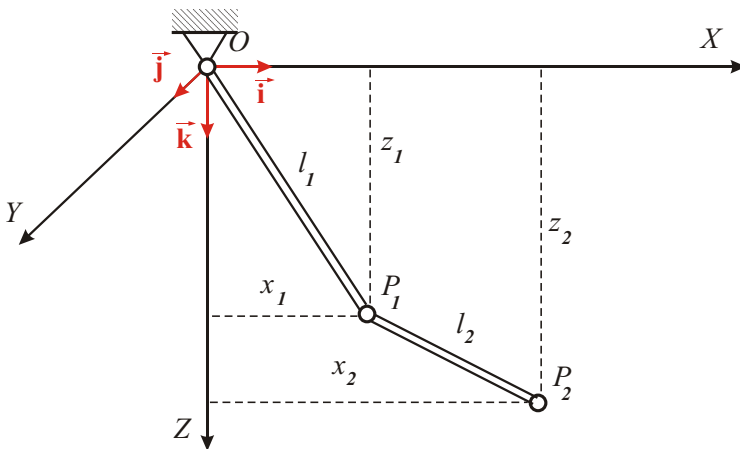
Przykład 2.3.7. Punkty materialne układu mają pozostawać na pewnej poruszającej się płaszczyźnie. Jak przedstawić w sposób ogólny równanie więzów?

Współrzędne punktów muszą wówczas spełniać ograniczenia wynikające z następujących związków

$$f_i \equiv A x_i + B y_i + C z_i - D t = 0, \quad (i = 1, \dots, N),$$

gdzie A, B, C, D są wielkościami stałymi. Podane równania opisują więzy geometryczne.

Przykład 2.3.8. Dwa punkty materialne (P_1 i P_2) poruszające się w płaszczyźnie XZ połączone prętem o pomijalnej masie i długości l_2 (rys. 2.3). Ponadto, punkt P_1 musi pozostawać w stałej odległości (l_1) od przegubu O . Napisać równania więzów.



Rysunek 2.3: Podwójne wahadło matematyczne – współrzędne prostokątne

Współrzędne punktów muszą spełniać ograniczenia wynikające z następujących związków:

$$f_1 \equiv y_1 = 0, \quad f_2 \equiv y_2 = 0,$$

$$f_3 \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0,$$

$$f_4 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0.$$

Oznacza to, że na punkty są nałożone więzy geometryczne.

2.3.3 Więzy kinematyczne

W przypadku gdy równania więzów zawierają pochodne względem czasu promieni wodzących (to jest prędkości punktów), to więzy nazywają się więzami kinematycznymi lub różniczkowymi

$$f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_1, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1, \dots, \vec{\mathbf{r}}_N, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_N) \equiv f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_i, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k). \quad (2.9)$$

W dalszych rozważaniach są rozpatrywane tylko takie więzy różniczkowe, w równaniu których prędkości punktów występują w pierwszej potęgde

$$g_s = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{l}}_{si} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i + d_s = 0, \quad (s = 1, \dots, r), \quad (2.10)$$

gdzie $\vec{\mathbf{l}}_{si} \cdot \vec{\mathbf{r}}_i$ oznacza iloczyn skalarny wektorów $\vec{\mathbf{l}}_{si}$ i $\vec{\mathbf{r}}_i$, a wektory $\vec{\mathbf{l}}_{si}$ i skalar d_s są danymi funkcjami zależnymi od czasu t i promieni wodzących punktów $\vec{\mathbf{r}}_i$ ($i = 1, \dots, N$). Zakłada się przy tym, że wektory $\vec{\mathbf{l}}_{si}$ nie mogą wszystkie jednocześnie być równe zeru (niekiedy więzy o postaci (2.10) są nazywane akatastatycznymi, a w przypadku gdy $d_s = 0$ - katastatycznymi).

Równania więzów kinematycznych (2.9 lub 2.10) można zapisać w prostokątnych układach współrzędnych kartezjańskich:

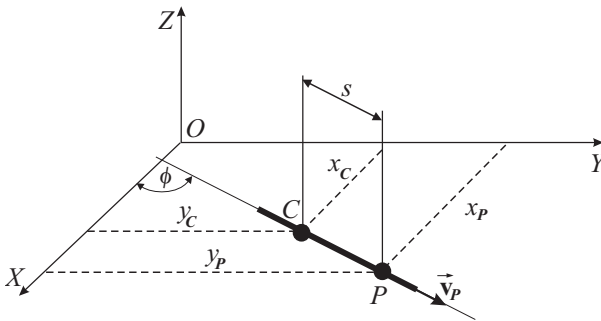
$$f_p(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (2.11)$$

$$g_s = \sum_{i=1}^N (a_{si} \dot{x}_i + b_{si} \dot{y}_i + c_{si} \dot{z}_i) + d_s = 0, \quad (s = 1, \dots, r), \quad (2.12)$$

gdzie a_{si} , b_{si} , c_{si} , ($i = 1, \dots, N$) są rzutami wektora $\vec{\mathbf{l}}_{si}$ na osie układu współrzędnych XYZ i są skalarnymi funkcjami zmiennych: $t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$.

2.3.4 Przykłady więzów kinematycznych

Przykład 2.3.9. Dwa punkty materialne (C i P) poruszają się na płaszczyźnie, pozostając w stałej odległości s . Układ ten może się poruszać tylko w taki sposób (rys. 2.4), że prędkość punktu P ma kierunek prostej łączącej punkty C i P (ruch łyżwy na płaszczyźnie). Napisać równania więzów.



Rysunek 2.4: Model łyżwy – współrzędne prostokątne

Równania więzów geometrycznych są następujące:

$$f_1: z_C = 0, \quad f_2: z_P = 0,$$

$$f_3: (x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 - s^2 = 0.$$

Kolejne równanie więzów można otrzymać z warunku równoległości wektora prędkości punktu P ($\operatorname{tg} \phi = \dot{y}_P / \dot{x}_P$) i wektora określającego kierunek pręta ($\operatorname{tg} \phi = (y_P - y_C) / (x_P - x_C)$)

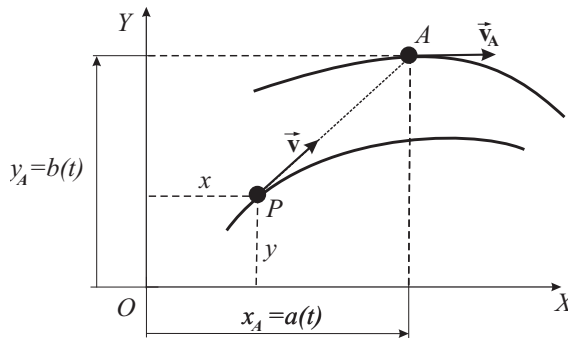
$$\frac{\dot{y}_P}{\dot{x}_P} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C}.$$

W standardowej formie (2.12) równanie to będzie miało postać

$$g_1: (y_P - y_C) \dot{x}_P - (x_P - x_C) \dot{y}_P = 0,$$

gdzie: $a_{11} = (y_P - y_C)$, $b_{11} = (x_P - x_C)$, $c_{11} = d_1 = 0$ ($N = 1$, $s = 1$).
Ostatnie z równań określa niecałkowalne więzy różniczkowe.

Przykład 2.3.10. Punkt materialny (P) znajduje się na płaszczyźnie i porusza się z prędkością stałe skierowaną w stronę ruchomego punktu A o współrzędnych $x_A = a(t)$, $y_A = b(t)$ (model "pościgu" – rys. 2.5). Określić rodzaj więzów.



Rysunek 2.5: Zagadnienie "pościgu" – wektory prędkości punktów P i A

Równania więzów są następujące:

– ruch odbywa się w płaszczyźnie XY , a więc

$$f_1: z = 0,$$

– z warunku nałożonego na prędkość punktu P wynika

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{a(t) - x}{b(t) - y}.$$

Ostatnie równanie można przedstawić w standardowej postaci:

$$g_1: \dot{x}(b(t) - y) - \dot{y}(a(t) - x) = 0.$$

Na punkt nałożone są więzy różniczkowe.

2.3.5 Więzy kinematyczne całkowalne

Omawiając więzy różniczkowe należy stwierdzić, że każde więzy geometryczne mogą być przedstawione w postaci więzów różniczkowych, których równanie otrzymuje się przez zróżniczkowanie równości (2.7) względem czasu

$$\frac{df_p}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (2.13)$$

gdzie przez $\frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i}$ oznaczono symbolicznie $grad f_p$, czyli $\frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} \equiv grad f_p$.

Jeżeli $\vec{r}_i = \vec{i}x_i + \vec{j}y_i + \vec{k}z_i$, gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oznaczają wersory osi ortogonalnego układu współrzędnych, to

$$\frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} \equiv grad f_p = \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial f_p}{\partial z_i} \vec{k},$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{i}\dot{x}_i + \vec{j}\dot{y}_i + \vec{k}\dot{z}_i$$

i zależność (2.13) sprowadza się do postaci

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_p}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial f_p}{\partial t} = 0, \quad (p = 1, \dots, k). \quad (2.14)$$

Takie więzy różniczkowe dają się oczywiście scałkować i nie są równoważne więzom skończonym (2.7). Po scałkowaniu mają postać

$$f_p(t, \vec{r}_i) = c_p, \quad (p = 1, \dots, k; i = 1, \dots, N), \quad (2.15)$$

gdzie c_p oznacza dowolną stałą. Dlatego też więzy różniczkowe (2.13) nazywają się całkowalne, a układ, na który nałożone są takie więzy, jest układem półholonomicznym.

Przykład 2.3.11. Na ruch punktu materialnego nałożono następujące ograniczenie $\dot{x}y - \dot{y}x = 0$. Określić rodzaj więzów.

Równanie więzów można sprowadzić do postaci:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} \quad \text{lub} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

ostatnie równanie po scałkowaniu można przedstawić w standardowej postaci:

$$f_1: x - Cy = 0.$$

Na punkt nałożone są więc więzy geometryczne.

Jeśli występują więzy geometryczne postaci (2.7), to układ nie może zająć dowolnego położenia w przestrzeni w dowolnej chwili. Więzy geometryczne nakładają ograniczenie na położenia układu w chwili t . Jeżeli natomiast występują tylko więzy kinematyczne niecałkowalne, układ może w dowolnej chwili t zająć dowolne położenie w przestrzeni. Jednakże w położeniu tym prędkości punktów układu nie mogą już być dowolne. Więzy różniczkowe nakładają ograniczenia na te prędkości.

Układ punktów materialnych nazywa się układem holonomicznym, jeżeli punkty tego układu nie podlegają żadnym niecałkowalnym więzom różniczkowym. Na przykład układem holonomicznym jest każdy swobodny układ punktów materialnych, jak również nieswobodny układ z więzami skończonymi lub różniczkowymi całkowalnymi. W przypadku układu holonomicznego wszystkie więzy mogą być zapisane w postaci skończonej.

Jeśli układ podlega więzom różniczkowym i przynajmniej jedno z tych równań jest niecałkowalne, to taki układ jest nazywany układem nieholonomicznym.

2.4 Więzy reonomiczne i skleronomiczne

Za punkt wyjścia do klasyfikacji więzów nałożonych na ruch punktów można też przyjąć występowanie (lub nie) czasu t w związkach analitycznych opisujących ograniczenia ruchu.

2.4.1 Więzy reonomiczne

Więzy geometryczne nazywają się reonomiczne (lub niestacjonarne), jeśli w ich równaniu czas (t) występuje jawnie, tj. jeżeli $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$. Natomiast więzy różniczkowe (2.10) lub (2.12) nazywają się reonomiczne, jeśli $d_s = d_s(t)$ lub wektory \mathbf{l}_{si} w równaniu (2.10) (odpowiednio współczynniki a_{si}, b_{si}, c_{si} w równaniu (2.12)) zależą jawnie od t .

Przykład 2.4.12. Dwa punkty materialne są połączone prętem o zmiennej długości l , tzn. $l = l(t)$. Określić rodzaj więzów.

Równanie więzów ma postać

$$f_1: (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - l^2(t) = 0$$

lub

$$f_1: (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2(t) = 0.$$

Jest to więc układ holonomiczny o więzach reonomicznych.

Przykład 2.4.13. Określić rodzaj więzów nałożonych na punkt pozostający na powierzchni kuli, która porusza się i deformuje.

W równaniu więzów jawnie wystąpi czas t . Symbolicznie można to zapisać w postaci

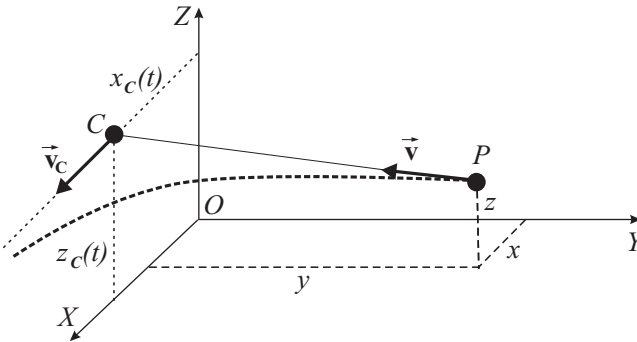
$$f(t, \vec{r}) = 0, \text{ czyli } f(t, x, y, z) = 0.$$

Dla kuli o zmieniającym się w czasie promieniu $R = at$ i poruszającej się ze stałą prędkością (v_0) równanie to przybiera postać

$$f(t, x, y, z) = (x - v_{0x}t)^2 + (y - v_{0y}t)^2 + (z - v_{0z}t)^2 - a^2t^2 = 0.$$

W tym przypadku na punkt są nałożone więzy skończone (geometryczne), ale niestacjonarne (reonomiczne).

Przykład 2.4.14. Rakieta samosterująca (punkt P) leci w kierunku celu (punkt C) poruszającego się ze stałą co do kierunku prędkością (rys. 2.6). Napisać równania więzów.



Rysunek 2.6: Model lotu rakiety samosterującej – wektory prędkości rakiety i jej celu

Wprowadzimy prostokątny układ współrzędnych, w którym oś X jest skierowana równoległe do kierunku ruchu celu (rys. 2.6). Z warunku równoległości prędkości i wektora łączącego raketę i cel otrzymujemy

$$\frac{\dot{x}}{x_c(t) - x} = \frac{\dot{y}}{0 - y} = \frac{\dot{z}}{z_c - z}.$$

Powyższe równanie w standardowej postaci przyjmuje formę dwóch równań:

$$g_1: \dot{z}y + \dot{y}(z_c - z) = 0 ,$$

$$g_2: \dot{x}y + \dot{y}[x_c(t) - x] = 0 .$$

Ostatnie z równań określa niecałkowalne reonomiczne więzy różniczkowe.

2.4.2 Więzy skleronomiczne

Jeżeli w równaniach więzów czas nie występuje jawnie, to są to więzy skleronomiczne (lub stacjonarne). Oznacza to, że więzy (2.7) są skleronomiczne, jeżeli $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. W tym przypadku lewa strona równania więzów różniczkowych (2.13) jest liniowa i jednorodna względem prędkości. Więzy różniczkowe (2.10) lub (2.12) nazywają się skleronomicznymi (stacjonarnymi), jeśli $d_s = 0$ i wektory \vec{I}_{si} w równaniu (2.10) (odpowiednio współczynniki a_{si}, b_{si}, c_{si} w równaniu (2.12)) nie zależą jawnie od t .

Przykład 2.4.15. Punkt materialny może poruszać się po nieruchomej nieodkształcalnej powierzchni. Podać rodzaj więzów.

Równanie powierzchni może być zadane w postaci

$$f(\vec{r}) = 0 , \quad \text{czyli} \quad f(x, y, z) = 0 .$$

Przedstawia ono skończone więzy dwustronne, geometryczne i stacjonarne (skleronomiczne).

Przykład 2.4.16. Dwa punkty materialne połączone prętem o stałej długości l mają pozostawać na wewnętrznej powierzchni sfery o promieniu R . Określić rodzaj układu i więzów.

W tym przypadku równania więzów mają postać:

$$\begin{aligned} f_1: (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - l^2 &= 0 , \\ f_2: \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 - R^2 &= 0 , \quad f_3: \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 - R^2 = 0 \end{aligned}$$

lub w układzie współrzędnych prostokątnych:

$$f_1: (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0 ,$$

$$f_2: x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0 ,$$

$$f_3: x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0 .$$

Rozpatrywany układ jest holonomiczny o więzach skleronomicznych.



W mechanice często posługujemy się modelem ciała rzeczywistego nazywanym ciałem sztywnym, to znaczy takim, w którym odległości pomiędzy punktami nie ulegają zmianie. Zauważmy, że ciało sztywne można rozpatrywać jako układ punktów materialnych podległych więzom typu (2.7) o postaci

$$f_p: (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l_{ij}^2 = 0 . \quad (2.16)$$

Z tego punktu widzenia swobodne ciało sztywne stanowi szczególny przypadek holonomicznego skleronomicznego układu punktów materialnych.

2.5 Więzy idealne i przemieszczenia przygotowane

Więzy idealne definiuje się poprzez zerową sumę prac sił ich reakcji wykonaną na przemieszczeniach przygotowanych. W związku z tym, zanim zostanie przedstawiona definicja więzów idealnych, należy wprowadzić pojęcie przemieszczenia przygotowanego.

2.5.1 Przemieszczenia przygotowane

Zakładamy, że układ materialny podlega k więzom geometrycznym (2.17) oraz r więzom różniczkowym (kinematycznym) (2.18):

$$f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k; i = 1, \dots, N), \quad (2.17)$$

$$g_s = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{l}}_{si} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i + d_s = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (2.18)$$

Po zróżniczkowaniu równań więzów geometrycznych względem czasu odpowiednie równania więzów kinematycznych (różniczkowych) są następujące

$$\frac{df_p}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\mathbf{r}}_i} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} = 0, \quad (p = 1, \dots, k). \quad (2.19)$$

Wektory \vec{v}_i nazywamy układem możliwych prędkości dla chwili t i dla danego położenia układu, jeżeli wektory \vec{v}_i spełniają $k + r$ równań liniowych (2.18) i (2.19). Z powyższego wynika, że prędkości możliwe to prędkości dopuszczalne przez więzy. Ponieważ z założenia $3N - (k + r) \geq 0$, dla każdego możliwego położenia układu w chwili t istnieje nieskończony zbiór układów możliwych prędkości. W rzeczywistym ruchu układu materialnego w chwili t realizuje się tylko jeden z tych układów możliwych prędkości – prędkości rzeczywiste. Przemieszczenia rzeczywiste (i prędkości rzeczywiste) wynikają z sił działających na układ i są zgodne z więzami.

Nieskończenie małe przemieszczenia $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$, ($i = 1, \dots, N$) nazywa się układem nieskończenie małych możliwych przemieszczeń lub krótko: układem przemieszczeń możliwych. Mnożąc równania (2.18) i (2.19) przez dt , otrzymamy równania określające możliwe przemieszczenia:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} dt = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (2.20)$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{l}_{si} \cdot d\vec{r}_i + d_s dt = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (2.21)$$

Biorąc pod uwagę dwa różne układy przemieszczeń możliwych dla tej samej chwili i dla tego samego położenia układu materialnego, możemy napisać

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt \quad \text{i} \quad d'\vec{r}_i = \vec{v}'_i dt, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.22)$$

Zarówno $d\vec{r}_i$, jak i $d'\vec{r}_i$ spełniają równania (2.20) i (2.21), a ich różnice ($\delta\vec{r}_i$)

$$\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_i - d'\vec{r}_i, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.23)$$

spełniają następujące układy równań jednorodnych:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (2.24)$$

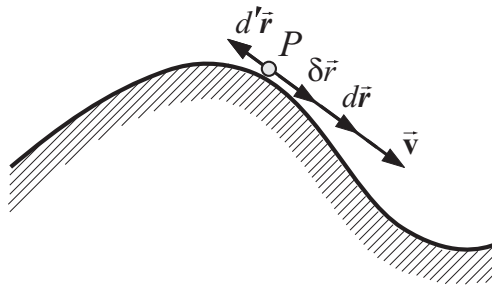
$$\sum_{i=1}^N \vec{l}_{si} \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (2.25)$$

- Wielkości $\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_i - d'\vec{r}_i$ nazywają się przemieszczeniami przygotowanymi (wirtualnymi).¹

Każdy układ wektorów $\delta\vec{r}_i$ spełniających równania (2.24) i (2.25) reprezentuje układ przemieszczeń wirtualnych. Równania (2.24) i (2.25) na przemieszczenia wirtualne różnią się od równań (2.20) i (2.21), określających przemieszczenia możliwe, brakiem wyrazów $\frac{\partial f_p}{\partial t} dt$ i $d_s dt$ (zależność między przemieszczeniami przygotowanymi nie zależy od tego, czy czas występuje w postaci jawnej w równaniach więzów, czy też nie). Przemieszczenia wirtualne określają przemieszczenia punktów układu materialnego z jednego możliwego położenia tego układu w chwili t do drugiego nieskończenie bliskiego położenia możliwego dla tej samej chwili t .

W przypadku więzów geometrycznych i stacjonarnych przemieszczenia wirtualne pokrywają się z przemieszczeniami możliwymi. W takich przypadkach zamiast $\delta\vec{r}_i$ można użyć $d\vec{r}_i$ ($\delta\vec{r}_i \equiv d\vec{r}_i$).

Przykład 2.5.17. Punkt (P) znajduje się na nieruchomej powierzchni. Określić przemieszczenia możliwe i przygotowane (rys. 2.7).



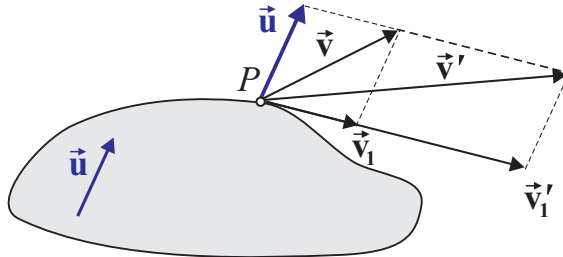
Rysunek 2.7: Więzy nałożone na punkt materialny i wynikające z nich kierunki wektorów: prędkości (\vec{v}), przemieszczeń możliwych ($d'\vec{r}$) i przemieszczenia przygotowanego ($\delta\vec{r}$)

Nieruchoma powierzchnia powoduje, że więzy nałożone na punkt mają postać $f \equiv f(\vec{r}) = 0$ i nie zależą od czasu. Odpowiadające więzom geometrycznym więzy różniczkowe $\frac{d}{dt}(f(\vec{r})) = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v} = 0$ przedstawiają iloczyn skalarny dwóch wektorów, z których pierwszy ($\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$) ma kierunek nor-

¹W matematyce wielkość $\delta\vec{r}_i$ jest nazywana **wariacją** wektora \vec{r}_i .

malnej do powierzchni. Wartość iloczynu wskazuje, że wektor prędkości jest prostopadły do normalnej. Zatem wektor \vec{v} , zaczepiony w punkcie P , musi być styczny w tym punkcie do powierzchni i reprezentuje możliwą prędkość. Odpowiadające tej prędkości przemieszczenie możliwe $d\vec{r} = \vec{v} dt$ również leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni w punkcie P . Także różnica $\delta\vec{r} = d'\vec{r} - d\vec{r}$ dwóch wektorów stycznych jest wektorem stycznym do powierzchni w tymże punkcie. A zatem dowolny wektor wystawiony z punktu P i leżący w płaszczyźnie stycznej może być rozpatrywany jako $d\vec{r}$ lub pewne $\delta\vec{r}$. (W przypadku gdy więzy są stacjonarne, przemieszczenia przygotowane pokrywają się z możliwymi.)

Przykład 2.5.18. Określić przemieszczenia możliwe i przygotowane punktu P poruszającego się po powierzchni ciała (rys. 2.8), które porusza się ruchem postępowym z prędkością \vec{u} . Więzy są opisane równaniem powierzchni $f(\vec{r}, t) = 0$.



Rysunek 2.8: Prędkości możliwe (\vec{v} i \vec{v}') punktu poruszającego się po powierzchni ruchomego ciała (\vec{u} – prędkość unoszenia)

Prędkość bezwzględna jest sumą wektorów prędkości unoszenia i prędkości względnej. Zatem prędkość możliwą (bezwzględną) \vec{v} otrzymuje się dodając do prędkości unoszenia \vec{u} dowolny wektor prędkości względnej \vec{v}_1 (styczny do powierzchni)

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u} ,$$

a zatem przemieszczenie możliwe jest określone jako

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = \vec{v}_1 dt + \vec{u} dt .$$

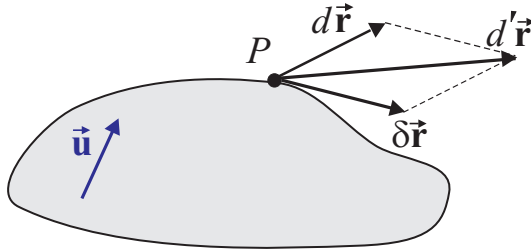
Analogicznie, dla innej prędkości względnej (\vec{v}_1') otrzymuje się przemieszczenie możliwe ($d'\vec{r}$) w formie

$$d'\vec{r} = \vec{v}' dt = \vec{v}_1' dt + \vec{u} dt .$$

Stąd przemieszczenie przygotowane

$$\delta\vec{r} = d'\vec{r} - d\vec{r} = (\vec{v}_1' - \vec{v}_1) dt$$

jest wektorem leżącym w płaszczyźnie stycznej do powierzchni w punkcie P (rys. 2.9).



Rysunek 2.9: Przemieszczenia możliwe ($d\vec{r}$ i $d'\vec{r}$) i przygotowane ($\delta\vec{r}$) punktu poruszającego się po powierzchni ruchomego ciała

Wektor $\delta\vec{r}$ przedstawia przemieszczenie przygotowane odpowiadające przemieszczeniu możliwemu punktu względem nieruchomej powierzchni $f(\vec{r}, t)$.

— ● —

W układzie współrzędnych kartezjańskich każdy wektor przemieszczenia przygotowanego $\delta\vec{r}_i$ jest określony trzema składowymi: $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ i równania (2.24)–(2.25), określające przemieszczenia wirtualne, można zapisać w postaci następującego układu równań:

– dla k więzów geometrycznych

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_p}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (2.26)$$

– dla r więzów kinematycznych

$$\sum_{i=1}^N (a_{si}\delta x_i + b_{si}\delta y_i + c_{si}\delta z_i) = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (2.27)$$

Wśród $3N$ wirtualnych przyrostów współrzędnych $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ występuje $n = 3N - (k + r)$ przyrostów niezależnych. Liczbę n nazywa się liczbą stopni swobody układu punktów materialnych.

- Liczba niezależnych wariacji współrzędnych określa liczbę (n) stopni swobody układu.

Przykład 2.5.19. Punkt materialny ma jednocześnie pozostawać na dwóch płaszczyznach. Określić przemieszczenia przygotowane i liczbę stopni swobody tego punktu.

Związki analityczne (równania płaszczyzn) opisujące więzy mają postać:

$$f_1 \equiv x + 3y + 4z - 10 = 0,$$

$$f_2 \equiv 3x + y + 7z = 0,$$

czyli przemieszczenia przygotowane muszą spełniać zależności:

$$\delta x + 3\delta y + 4\delta z = 0,$$

$$3\delta x + \delta y + 7\delta z = 0.$$

Tylko jedno z przemieszczeń przygotowanych jest niezależne, można je wybrać dowolnie, na przykład δz . Po rozwiązaniu układu równań otrzymamy: $\delta x = -\frac{17}{8}\delta z$, $\delta y = -\frac{5}{8}\delta z$.

Punkt ma jeden stopień swobody $n = 3N - (k + r) = 3 \cdot 1 - (2 + 0) = 1$.

2.5.2 Więzy idealne

Nałożenie więzów na układ punktów powoduje, że pojawiają się zależności między przyspieszeniami punktów. Zależności te otrzymuje się, różniczkując równości (2.19) i (2.18) względem czasu:

– dla więzów geometrycznych

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{\ddot{a}}_i + \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{df_p}{dt} \mathbf{r}_i \right) \cdot \mathbf{\dot{v}}_i + \frac{d}{dt} \frac{df_p}{dt} = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (2.28)$$

– dla więzów kinematycznych

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{l}}_{si} \cdot \vec{\mathbf{a}}_i + \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{\mathbf{l}}_{si}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i + \frac{dd_s}{dt} = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (2.29)$$

Równania (2.28) i (2.29) pokazują, jakie ograniczenia zostają narzucone na przyspieszenia $\vec{\mathbf{a}}_i$ przez więzy.

Z zależności (2.28) i (2.29) wynika, że w przypadku układów nieswobodnych muszą pojawić się dodatkowe siły (siły oddziaływania więzów), które zapewniają spełnienie równań ruchu wynikających z drugiego prawa Newtona i równań więzów. Siły te ($\vec{\mathbf{R}}_i$) noszą nazwę reakcji więzów.

Po wprowadzeniu do równań Newtona sił aktywnych (zadanych) $\vec{\mathbf{F}}_i$ oraz sił reakcji więzów $\vec{\mathbf{R}}_i$ otrzymuje się

$$m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i + \vec{\mathbf{R}}_i, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.30)$$

a przyspieszenia wyznaczone z równań (2.30) są już zgodne z więzami.

W tym momencie pojawia się problem: liczba $6N$ nieznanymi wielkościami (współrzędnymi wektorów) $x_i, y_i, z_i, R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}$ ($i = 1, \dots, N$), które należałoby wyznaczyć, jest większa od liczby związków, jakimi dysponujemy, tzn. od liczby równań ruchu:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + R_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + R_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + R_{iz}, \quad (2.31) \\ (i = 1, \dots, N)$$

i równań więzów (2.17) oraz (2.18):

– dla więzów geometrycznych

$$f_p(t, \vec{\mathbf{r}}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k; i = 1, \dots, N),$$

– dla więzów kinematycznych

$$g_s = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{l}}_{si} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i + d_s = 0, \quad (s = 1, \dots, r),$$

(czyli $3N + k + r < 6N$).

Z przeprowadzonych powyżej prostych obliczeń wynika, że do rozwiązania zagadnienia dynamiki, polegającego na określeniu ruchu układu i reakcji więzów, potrzeba jeszcze $6N - (3N + k + r) = 3N - k - r = n$ dodatkowych związków. Można je otrzymać, jeżeli ograniczymy się do rozpatrywania układów nieswobodnych o więzach idealnych.

- **Więzami idealnymi nazywamy takie więzy, dla których suma prac δL sił reakcji więzów $\vec{\mathbf{R}}_i$ na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych $\delta \vec{\mathbf{r}}_i$ jest zawsze równa zero – to znaczy**

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{R}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0. \quad (2.32)$$

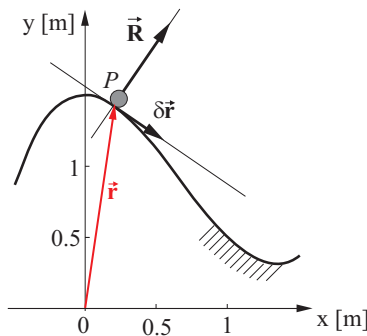
W postaci rozwiniętej równość (2.32) można napisać

$$\delta L = \sum_{i=1}^N (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (2.33)$$

W równaniu (2.33) wśród $3N$ wielkości $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, liczba niezależnych wielkości wynosi $n = 3N - (k + r)$. Można zatem wyrazić $k + r = 3N - n$ zależnych przyrostów $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, przez n przyrostów niezależnych. Współczynniki przy niezależnych przyrostach muszą być równe zero (daje to n brakujących związków). Wprowadzenie więzów idealnych pozwala na rozwiązanie podstawowego zagadnienia dynamiki układu nieswobodnego.

2.5.3 Przykłady więzów idealnych

Klasyczne przykłady więzów idealnych są przedstawione w kolejnych zadaniach.



Rysunek 2.10: Ruch punktu po nieruchomej krzywej

Przykład 2.5.20. Punkt materialny (rys. 2.10) porusza się po nieruchomej gładkiej płaskiej krzywej opisanej równaniem $f_1 = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}$. Określić klasę więzów nałożonych na punkt.

Dowolne przemieszczenie $d\vec{r}$, jak też i dowolne przemieszczenie przygotowane $\delta\vec{r}$, leżą na stycznej do krzywej w punkcie P . Reakcja gładkiej krzywej ma kierunek normalny do krzywej, jest równoległa do wektora $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$ i może być przedstawiona w postaci $\vec{R} = R \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$, skąd:

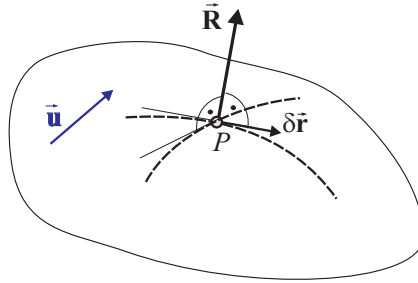
$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = R \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{i} \quad \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = R \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

Więzy nałożone na punkt materialny poruszający się po nieruchomej gładkiej krzywej są więzami idealnymi.



W przypadku więzów geometrycznych skleronomicznych praca sił reakcji więzów na przemieszczeniach możliwych jest równa pracy sił reakcji na przemieszczeniach przygotowanych.

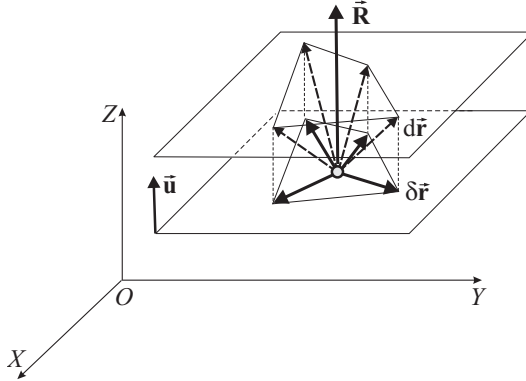
Przykład 2.5.21. Punkt materialny (P) porusza się po ruchomej (lub deformującej się) gładkiej powierzchni (rys. 2.11). Określić klasę więzów nałożonych na ten punkt.



Rysunek 2.11: Ruch punktu po ruchomej powierzchni (\vec{u} – prędkość unoszenia)

Możliwa prędkość \vec{v} punktu materialnego i jego nieskończenie małe przemieszczenie możliwe określone zależnością $d\vec{r} = \vec{v} dt$ nie leżą w płaszczyźnie stycznej. Natomiast przemieszczenie wirtualne $\delta\vec{r}$, które jest nieskończenie małym możliwym przemieszczeniem dla powierzchni nieruchomej, leży w płaszczyźnie stycznej. Ponieważ dla gładkiej powierzchni reakcja jest skierowana prostopadle do powierzchni, więc $\vec{R} \cdot \delta\vec{r} = 0$.

Przykład 2.5.22. Określić różnicę pomiędzy pracą elementarną ($d'L$) i pracą przygotowaną (δL) reakcji więzów działających na punkt pozostający na poruszającej się – z prędkością \vec{u} – płaszczyźnie.



Rysunek 2.12: Punkt na ruchomej płaszczyźnie (przeszyczenia możliwe – linie przerywane, przeszczenia przygotowane – linie ciągłe)

Przyjmujemy, że płaszczyzna porusza się ze stałą prędkością \vec{u} do niej prostopadłą. Wprowadzając układ osi jak na rysunku 2.12, otrzymujemy następujące równanie więzów

$$f = z - u t = 0 .$$

Wobec tego przeszczenia możliwe muszą spełniać warunek

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy + 1 \cdot dz - u dt = dz - u dt = 0 ,$$

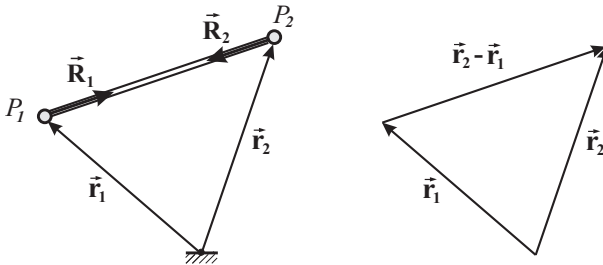
a przeszczenia przygotowane

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \cdot \delta x + 0 \cdot \delta y + 1 \cdot \delta z = \delta z = 0 .$$

Zatem praca elementarna $d'L = R_z dz = R_z u dt \neq 0$, a praca przygotowana $\delta L = R_z \delta z = R_z \cdot 0 = 0$.

Z zamieszczonych przykładów wynika, że gładka powierzchnia zarówno nieruchoma, jak i ruchoma lub deformująca się jest przykładem więzów idealnych. Ostatni przykład poglądowo objaśnia, dlaczego przy określeniu niestacjonarnych więzów idealnych konieczne jest przyrównanie do zera pracy sił reakcji na dowolnych wirtualnych, a nie możliwych, przemieszczeniach. Dalsze przykłady dotyczą jedynie układów z więzami stacjonarnymi.

Przykład 2.5.23. Dwa punkty materialne są połączone prętem o niezmienniej długości i pomijalnie małej masie (rys. 2.13). Określić rodzaj więzów nałożonych na układ.



Rysunek 2.13: Dwa punkty połączone nieodkształcalnym prętem

Oznaczmy przez $\vec{\mathbf{R}}_1$ i $\vec{\mathbf{R}}_2$ reakcje więzów działające na punkty materialne P_1 i P_2 . Wówczas zgodnie z trzecim prawem Newtona punkty oddziałują na siebie siłami $\vec{\mathbf{R}}_1 = -\vec{\mathbf{R}}_2$. Siły $\vec{\mathbf{R}}_1$ i $\vec{\mathbf{R}}_2$, mają przeciwne zwroty i są skierowane wzdłuż pręta, co można zapisać w postaci:

$$\vec{\mathbf{R}}_1 = \lambda (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1) ,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Praca reakcji więzów po uwzględnieniu, że przemieszczenia przygotowane pokrywają się z przemieszczeniami możliwymi (więzy geometryczne skleronomiczne) wynosi

$$\vec{\mathbf{R}}_1 \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot (d\vec{\mathbf{r}}_1 - d\vec{\mathbf{r}}_2) = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot d(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) .$$

Wykorzystując dodatkowo zależność $\vec{\mathbf{R}}_1 = \lambda (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)$, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot d(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) &= \lambda (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1) \cdot d(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) = \\ &= -\frac{1}{2} \lambda d[(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2)] = 0 , \end{aligned}$$

ponieważ $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \text{const}$, a różniczka wielkości stałej jest równa zero. Zatem są to więzy idealne.



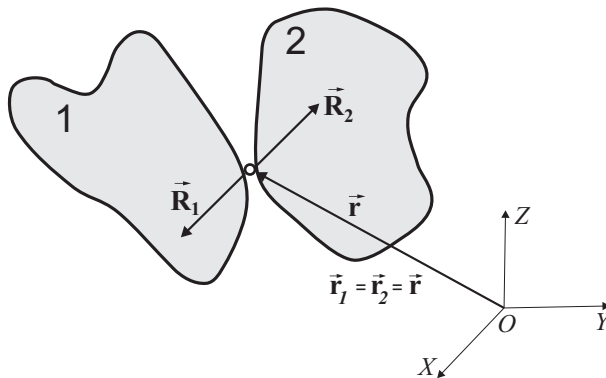
Ciało doskonale sztywne jest układem punktów materialnych, w którym na każde dwa dowolne punkty nałożone są więzy opisane powyżej. Wobec tego ciało sztywne można uważać za układ punktów materialnych podległych więzom idealnym.

Przykład 2.5.24. Dwa ciała sztywne są połączone przegubem kulistym (rys. 2.14). Określić rodzaj nałożonych więzów.

Zgodnie z trzecim prawem Newtona (podobnie jak i w poprzednim przykładzie) $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{0}$, wynika stąd

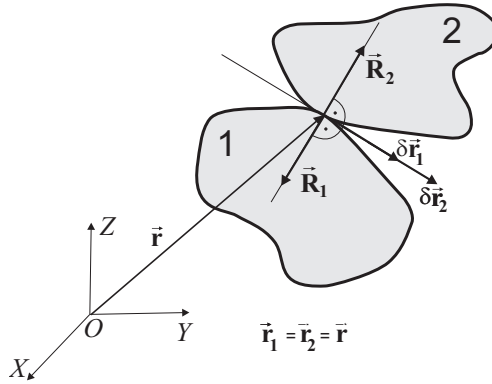
$$\vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = \delta\vec{r} \cdot (\vec{R}_1 + \vec{R}_2) = 0,$$

a więc są to więzy idealne.



Rysunek 2.14: Ciała połączone przegubem

Przykład 2.5.25. Dwa ciała sztywne (rys. 2.15) podczas ruchu dotykają się swymi idealnie gładkimi powierzchniami. Określić rodzaj więzów nałożonych na ciała.



Rysunek 2.15: Dwa gładkie stykające się ciała

W tym przypadku także $\vec{\mathbf{R}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{0}$, a reakcje $\vec{\mathbf{R}}_1$ i $\vec{\mathbf{R}}_2$ mają wspólny kierunek normalnej do powierzchni. Względna prędkość tych ciał w miejscu ich styku, $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$, a więc i różnica przemieszczeń możliwych $d\vec{\mathbf{r}}_1 - d\vec{\mathbf{r}}_2 = (\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2)dt$ leżą na wspólnej płaszczyźnie stycznej. A zatem

$$\vec{\mathbf{R}}_1 \cdot \delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 \cdot \delta\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 \cdot d\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot (d\vec{\mathbf{r}}_1 - d\vec{\mathbf{r}}_2) = 0$$

takie więzy są idealne.

Przykład 2.5.26. Dwa ciała sztywne (rys. 2.16) podczas ruchu dotykają się wzajemnie doskonale chropowatymi powierzchniami (tzw. zązębienie lub sprzężenie zębate). Określić rodzaj więzów.

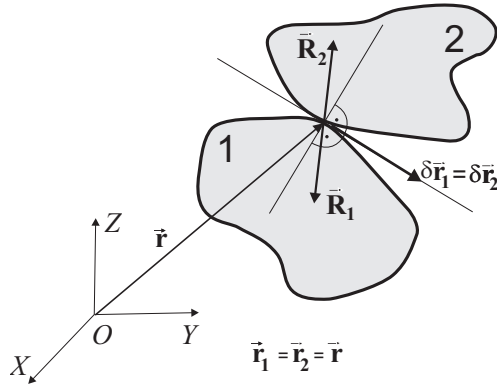
Względna prędkość poślizgu jest równa $\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{0}$. Wobec tego również $d\vec{\mathbf{r}}_1 - d\vec{\mathbf{r}}_2 = (\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2)dt = \mathbf{0}$, a zatem i tu

$$\vec{\mathbf{R}}_1 \cdot \delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 \cdot \delta\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 \cdot d\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot (\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2) dt = 0$$

mamy do czynienia z więzami idealnymi.



W przypadkach gdy w układach występuje tarcie, można traktować podobnie jak więzy idealne i uwzględnić jedynie składowe normalne siły reakcji niégładkich powierzchni, a siły tarcia należy uznać za nieznanne siły aktywne.



Rysunek 2.16: Ciała doskonale chropowate (toczenie bez poślizgu)

Pojawienie się nowych niewiadomych kompensuje się dodatkowymi związkami wynikającymi z eksperymentalnych praw rządzących tarcie.

W dalszym ciągu zawsze będziemy zakładali, że wszelkie więzy nałożone na rozważane układy są więzami idealnymi.

Przykład 2.5.27. Końce pręta o długości L mogą przemieszczać się po dwóch okręgach (rys. 2.17) o promieniach R_1 i R_2 . Okręgi znajdują się w prostopadłych do siebie płaszczyznach (XZ i YZ). Ich środki są odpowiednio w punkcie $O_1(0, 0, 0)$ i w punkcie $O_2(0, a, 0)$, przy czym $a = 1,6$ m, $R_1 = 1,0$ m, $R_2 = 1,5$ m, $a = 1,6$ m, $L = 2,41$ m, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$. Określić, posługując się biegunowymi układami współrzędnych, przemieszczenia przygotowane końców pręta (punktów 1 i 2) i liczbę stopni swobody tego układu.

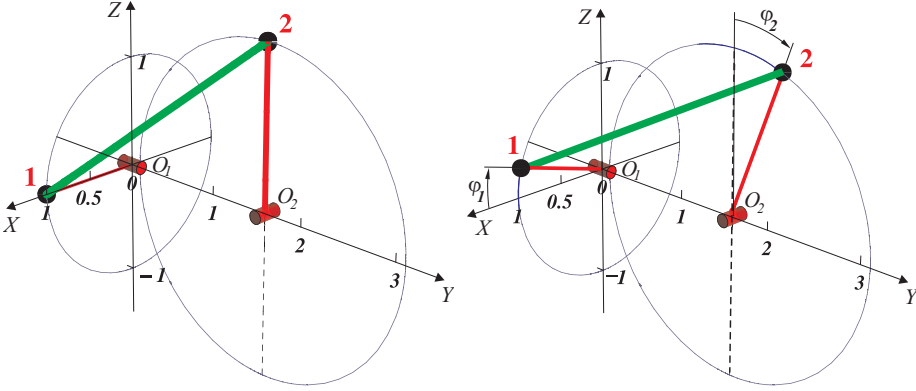
Dla określenia położenia punktu 1 wprowadzimy układ biegunowy leżący w płaszczyźnie XZ , dla punktu 2 układ biegunowy leżący w płaszczyźnie YZ (rys. 2.17). Współrzędne określające położenie układu (dla $R_1 = \text{const}_1$, $R_2 = \text{const}_2$) to dwa kąty $q = (\varphi_1, \varphi_2)$. Więzy nałożone na układ punktów wynikają z faktu, że punkty poruszają się po okręgach i są połączone prętem o długości L .

Współrzędne określające położenie układu muszą spełniać zależności:

$$f_1 = R_1 - \text{const}_1 = 0,$$

$$f_2 = R_2 - \text{const}_2 = 0,$$

$$f_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L^2 = 0.$$



Rysunek 2.17: Model układu w położeniu początkowym oraz współrzędne φ_1, φ_2

Podstawiając $x_1 = R_1 \cos(\varphi_1)$, $y_1 = 0$, $z_1 = R_1 \sin(\varphi_1)$ oraz $x_2 = 0$, $y_2 = a - R_2 \cos(\varphi_2)$, $z_2 = R_2 \sin(\varphi_2)$ do wyrażenia na f_3 , otrzymuje się

$$f_3 = (0 - R_1 \cos(\varphi_1))^2 + (a - R_2 \cos(\varphi_2) - 0)^2 + (R_2 \sin(\varphi_2) - R_1 \sin(\varphi_1))^2 - L^2 = 0,$$

a po prostych przekształceniach trygonometrycznych

$$f_3 = L^2 - \left(a^2 - 2aR_2 \cos(\varphi_2) - 2R_1R_2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + R_1^2 + R_2^2 \right) = 0.$$

Jeśli przyjąć, że $L^2 = a^2 + R_1^2 + R_2^2$ (co nie zmniejsza ogólności rozważań), to ostatecznie uzyskuje się

$$f_3 = a \cos(\varphi_2) + R_1 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = 0.$$

Cztery współrzędne ($\varphi_1, \varphi_2, R_1, i R_2$) występujące w równaniach powodują, że w zadaniu należy wyznaczyć następujące przemieszczenia przygotowane $\delta q = \{\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta R_1, \delta R_2\}$, które muszą spełniać zależności:

$$\delta f_1 = \delta R_1 = 0,$$

$$\delta f_2 = \delta R_2 = 0,$$

$$\delta f_3 = \delta\varphi_2 (-a \sin(\varphi_2) + R_1 \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)) + R_1 \delta\varphi_1 \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1) + \delta R_1 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = 0.$$

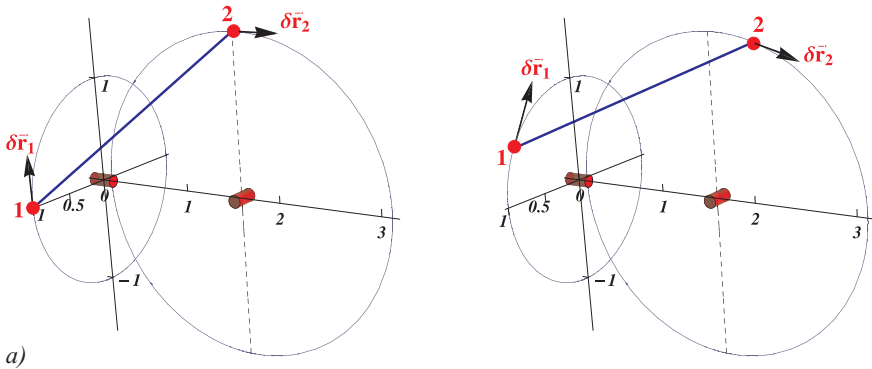
Z dwóch pierwszych zależności wynika, że $\delta R_1 = 0$ i $\delta R_2 = 0$. Uwzględniając to w δf_3 , związek między przemieszczeniami przygotowanymi przybiera formę

$$\delta\varphi_2 (-a \sin(\varphi_2) + R_1 \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)) + R_1 \delta\varphi_1 \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1) = 0.$$

Tylko jedno z dwóch przemieszczeń przygotowanych $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ występujących w tym równaniu jest niezależne – można je wybrać dowolnie, na przykład jako niezależne przyjmując $\delta\varphi_2$. Po rozwiązaniu tego równania otrzymuje się zależne przemieszczenie przygotowane $\delta\varphi_1$ w formie

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta\varphi_2 \csc(\varphi_2) \sec(\varphi_1) (a \sin(\varphi_2) - R_1 \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2))}{R_1}.$$

Wyniki rozwiązania układu równań dla położenia pokazanego na rys. 2.17 (dla parametrów: $R_1 = 1,0$ m, $R_2 = 1,5$ m, $a = 1,6$ m, $L = 2,41$ m, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$) zostały pokazane na rys. 2.18a



Rysunek 2.18: Dwa położenia modelu z zaznaczonymi przemieszczeniami przygotowanymi

Wyznaczone wielkości mają następujące wartości:

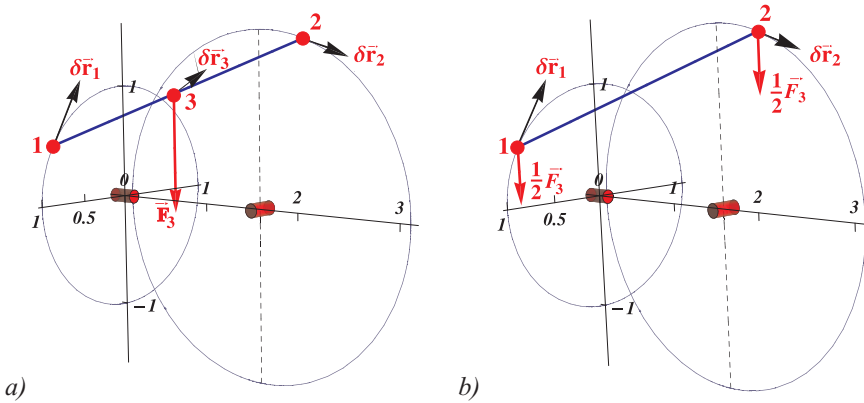
- przemieszczenia przygotowane punktu 1: $\delta R_1 = 0$, $\delta\varphi_1 = 0,503$,
- przemieszczenia przygotowane punktu 2: $\delta R_2 = 0$, $\delta\varphi_2 = \pi/10$,
- przemieszczenia przygotowane $\delta\vec{r}_1$: $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$, $\delta z_1 = 0,503$,
- przemieszczenia przygotowane $\delta\vec{r}_2$: $\delta x_2 = 0$, $\delta y_2 = 0,471$, $\delta z_2 = 0$.

Dla położenia przedstawionego na rys. 2.18b (dla zadanych wartości $\varphi_1 = 0,5467$ rad, $\varphi_2 = 1,885$ rad) wyniki są jak niżej:

– $\delta\vec{r}_1$: $\delta x_1 = -0,338$, $\delta y_1 = 0$, $\delta z_1 = 0,556$,

– $\delta\vec{r}_2$: $\delta x_2 = 0$, $\delta y_2 = 0,448$, $\delta z_2 = -0,146$.

Przykład 2.5.28. Dla układu z rys. 2.17 (s. 50) omówionego w poprzednim zadaniu – wykorzystując otrzymane tam wyniki – wyznaczyć pracę przygotowaną w zadanym położeniu układu – przedstawionym na rys. 2.19. Układ jest obciążony siłą ciężkości pręta F_3 .



Rysunek 2.19: Modele układu obciążonego siłą ciężkości \vec{F}_3 (a) i dwiema siłami $\frac{1}{2}\vec{F}_3$ (b) – z zaznaczonymi przemieszczeniami przygotowanymi

Korzystając z definicji pracy przygotowanej, można napisać zależność

$$\delta L_3 = \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r}_3,$$

przy czym, uwzględniając związek $\vec{r}_3 = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$, otrzymuje się

$$\delta L_3 = \vec{F}_3 \cdot \frac{1}{2}(\delta \vec{r}_1 + \delta \vec{r}_2) = \frac{1}{2}(\vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r}_2).$$

Iloczyny skalarne występujące w powyższej zależności wymagają określenia cosinusów kątów między wektorami – wynoszą one odpowiednio:

$$\cos(\angle \vec{F}_3, \delta \vec{r}_1) = \cos(\pi/2 + \varphi_1) = -\cos(\varphi_1), \quad \cos(\angle \vec{F}_3, \delta \vec{r}_2) = -\cos(\varphi_2),$$

a w konsekwencji

$$\delta L_3 = \frac{1}{2}(\vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r}_2) = -\frac{1}{2}F_3[\delta r_1 \cos(\varphi_1) + \delta r_2 \cos(\varphi_2)].$$

Ponieważ $\delta r_1 = R_1 \delta \varphi_1$ oraz $\delta r_2 = R_2 \delta \varphi_2$ mamy

$$\delta L_3 = -\frac{1}{2} F_3 [R_1 \delta \varphi_1 \cos(\varphi_1) + R_2 \delta \varphi_2 \cos(\varphi_2)].$$

Z poprzedniego zadania (s. 51) można wykorzystać zależność ($f_3 = a \cos(\varphi_2) + R_1 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = 0$), która prowadzi do równania

$$\sin(\varphi_1) = -\frac{a}{R_1} \operatorname{ctg}(\varphi_2).$$

Wyznaczając wariacje z obu stron tego równania, uzyskuje się

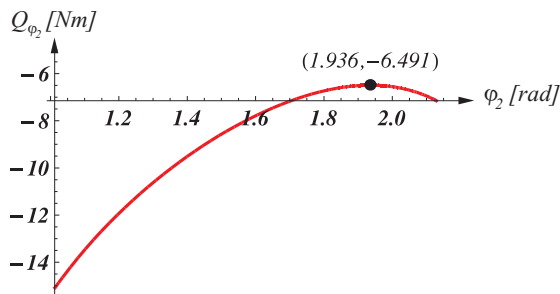
$$\delta \varphi_1 \cos(\varphi_1) = \frac{a}{R_1 \sin^2(\varphi_2)} \delta \varphi_2.$$

Otrzymana zależność pozwala wyrazić pracę przygotowaną w postaci

$$\begin{aligned} \delta L_3 &= -\frac{1}{2} F_3 \left[R_1 \frac{a}{R_1 \sin^2(\varphi_2)} \delta \varphi_2 + R_2 \delta \varphi_2 \cos(\varphi_2) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} F_3 \left[\frac{a}{\sin^2(\varphi_2)} + R_2 \cos(\varphi_2) \right] \delta \varphi_2 = Q_{\varphi_2} \delta \varphi_2, \end{aligned}$$

zatem siła uogólniona odpowiadająca współrzędnej φ_2

$$Q_{\varphi_2} = -\frac{1}{2} F_3 \left[\frac{a}{\sin^2(\varphi_2)} + R_2 \cos(\varphi_2) \right].$$



Rysunek 2.20: Wykres siły Q_{φ_2} w funkcji kąta obrotu wahacza (φ_2)

Wykres siły uogólnionej Q_{φ_2} (momentu siły F_3) przedstawiony na rys. 2.20 świadczy o tym, że analizowany układ nie może (w zakresie dopuszczalnych zmian kąta φ_2) osiągnąć położenia równowagi.

Rozdział 3

RÓWNANIA DYNAMIKI I ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH WE WSPÓŁRZĘDNYCH KARTEZJAŃSKICH

3.1 Ogólne równanie dynamiki analitycznej

Dla wszystkich punktów materialnych układu nieswobodnego drugie prawo Newtona można zapisać w postaci:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.1)$$

albo

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 - \vec{F}_1 &= \vec{R}_1, \\ \dots\dots\dots \\ m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i &= \vec{R}_i, \\ \dots\dots\dots \\ m_N \vec{a}_N - \vec{F}_N &= \vec{R}_N, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie:

m_i – masa i -tego punktu,

\vec{a}_i – jego przyspieszenie,

\vec{F}_i – wypadkowa sił aktywnych,

\vec{R}_i – wypadkowa sił reakcji, działających na ten punkt.

Po pomnożeniu obu stron każdego z równań (3.2) przez przemieszczenia przygotowane $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_i, \dots, \delta\vec{r}_N$, a następnie dodaniu wszystkich równań stronami otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^N (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i. \quad (3.3)$$

Jeśli więzy są idealne, to w dowolnym położeniu układu przy dowolnych przemieszczeniach przygotowanych musi być spełniony warunek

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (3.4)$$

Podstawiając do zależności (3.4) zamiast reakcji \vec{R}_i wielkości obliczone z równań (3.1), otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (3.5)$$

Równość (3.5) nazywa się ogólnym równaniem dynamiki analitycznej.

W formie rozwiniętej – dla współrzędnych kartezjańskich – równanie (3.5) ma postać

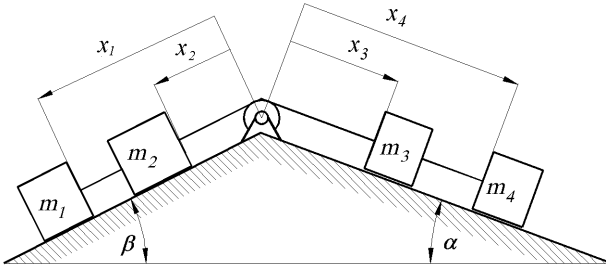
$$\sum_{i=1}^N [(F_{ix} - m_i a_{ix}) \delta x_i + (F_{iy} - m_i a_{iy}) \delta y_i + (F_{iz} - m_i a_{iz}) \delta z_i] = 0. \quad (3.6)$$

Ogólne równanie dynamiki pozwala rozwiązać zagadnienie ruchu układu punktów materialnych, na który są nałożone więzy idealne. W zależności (3.6) występuje $3N$ niewiadomych przyspieszeń a_{ix}, a_{iy}, a_{iz} ($i = 1, \dots, N$), a pozwala ona uzyskać tylko $3N - (k + r)$ równań. Równania te otrzymuje się przez przyrównanie do zera współczynników stojących przy niezależnych przemieszczeniach przygotowanych. Brakującymi równaniami (w ilości $k + r$) potrzebnymi do jednoznacznego rozwiązania zagadnienia ruchu są równania więzów. Tak więc liczba niewiadomych wynosi $3N$, a liczba równań $3N - k - r + k + r = 3N$. Zagadnienie ruchu jest zatem jednoznacznie określone, jeżeli są znane równania (3.5) oraz równania więzów (2.17) i (2.18).

Przykład 3.1.29. Po płaszczyznach gładkiego klina poruszają się cztery punkty połączone lekką nierozciągliwą nicią (rys. 3.1). Płaszczyzny są nachylone do poziomu pod kątami α i β , a masy punktów wynoszą m_1, m_2, m_3, m_4 . Wyznaczyć przyspieszenia punktów.

Równania więzów nałożonych na ruch punktów są następujące ($k = 3$):

$$f_1 \equiv x_2 + x_3 - l_{23} = 0, \quad f_2 \equiv x_1 - x_2 - l_{12} = 0, \quad f_3 \equiv x_4 - x_3 - l_{34} = 0,$$



Rysunek 3.1: Model układu czterech punktów

Ogólne równanie dynamiki analitycznej dla pokazanego układu ma postać

$$(m_1 g \sin \beta - m_1 \ddot{x}_1) \delta x_1 + (m_2 g \sin \beta - m_2 \ddot{x}_2) \delta x_2 + \\ + (m_3 g \sin \alpha - m_3 \ddot{x}_3) \delta x_3 + (m_4 g \sin \alpha - m_4 \ddot{x}_4) \delta x_4 = 0.$$

Związki między przemieszczeniami przygotowanymi, wynikające z równań więzów, są następujące:

$$\delta x_2 = -\delta x_3, \quad \delta x_1 = \delta x_2, \quad \delta x_4 = \delta x_3.$$

Rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody ($n = N - k = 4 - 3 = 1$), zatem jedno przemieszczenie przygotowane jest niezależne, a pozostałe są zależne i można je określić poprzez niezależne przemieszczenie. Wybierając δx_1 jako niezależne przemieszczenie przygotowane, określamy zależne przemieszczenia przygotowane jako:

$$\delta x_2 = \delta x_1, \quad \delta x_3 = -\delta x_1, \quad \delta x_4 = -\delta x_1.$$

Zastępując zależne przemieszczenia przygotowane występujące w równaniu dynamiki analitycznej poprzez niezależne, otrzymuje się:

$$(m_1 g \sin \beta - m_1 \ddot{x}_1) \delta x_1 + (m_2 g \sin \beta - m_2 \ddot{x}_2) \delta x_1 + \\ + (m_3 g \sin \alpha - m_3 \ddot{x}_3) (-\delta x_1) + (m_4 g \sin \alpha - m_4 \ddot{x}_4) (-\delta x_1) = 0$$

lub

$$(m_1 g \sin \beta - m_1 \ddot{x}_1 + m_2 g \sin \beta - m_2 \ddot{x}_2 + \\ - m_3 g \sin \alpha + m_3 \ddot{x}_3 - m_4 g \sin \alpha + m_4 \ddot{x}_4) \delta x_1 = 0 .$$

Ogólne równanie dynamiki musi być spełnione dla dowolnego niezerowego niezależnego przemieszczenia przygotowanego. Zatem wyrażenie stojące w nawiasie przy niezależnym przemieszczeniu przygotowanym musi być równe zero

$$m_1 g \sin \beta - m_1 \ddot{x}_1 + m_2 g \sin \beta - m_2 \ddot{x}_2 - m_3 g \sin \alpha + m_3 \ddot{x}_3 - m_4 g \sin \alpha + m_4 \ddot{x}_4 = 0 .$$

Po uwzględnieniu zależności między przyspieszeniami (po zróźniczkowaniu równań więzów):

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_3, \quad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2, \quad \ddot{x}_4 = \ddot{x}_3 ,$$

otrzymujemy rozwiązanie

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_3 = -\ddot{x}_4 = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \beta - (m_3 + m_4)g \sin \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} .$$

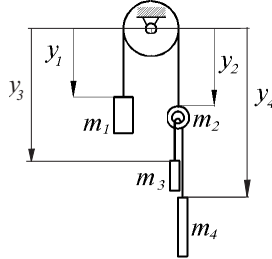
Przykład 3.1.30. Przez nieruchomy lekki krążek o promieniu r przerzucono nić o długości l_1 . Na jednym końcu (rys. 3.2) zawieszono ciężar o masie $m_1 = 4m$, a na drugim gładki pierścień o masie $m_2 = m$. Przez ten pierścień przerzucono lekką nić długości l_2 , na końcach której umieszczono ciężary o masach $m_3 = m$ i $m_4 = 2m$ (Jako modele ciał przyjąć punkty materialne poruszające się w kierunku pionowym). Obliczyć przyspieszenia ciał.

Między współrzędnymi punktów występują następujące zależności:

$$f_1 \equiv y_1 + y_2 - l_1 + \pi r = 0 ,$$

$$f_2 \equiv y_3 + y_4 - 2y_2 - l_2 = 0 ,$$

zatem spośród czterech współrzędnych dwie są zależne.



Rysunek 3.2: Sposób połączenia punktów i wprowadzone współrzędne

Ogólne równanie dynamiki zapisane dla rozpatrywanego układu ma postać

$$(m_1 g - m_1 \ddot{y}_1) \delta y_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{y}_2) \delta y_2 + (m_3 g - m_3 \ddot{y}_3) \delta y_3 + (m_4 g - m_4 \ddot{y}_4) \delta y_4 = 0 .$$

Z równań więzów wynikają następujące zależności między przemieszczeniami przygotowanymi:

$$\delta y_1 + \delta y_2 = 0 ,$$

$$\delta y_3 + \delta y_4 - 2\delta y_2 = 0 ,$$

skąd otrzymuje się zależne przemieszczenia przygotowane (przy założeniu niezależnych δy_2 i δy_4):

$$\delta y_1 = -\delta y_2 ,$$

$$\delta y_3 = -\delta y_4 + 2\delta y_2 .$$

Podstawiając te związki do ogólnego równania dynamiki, grupując wyrażenia przy wybranych jako niezależne przemieszczeniach przygotowanych (δy_2 , δy_4), otrzymuje się

$$(m_1 \ddot{y}_1 - m_2 \ddot{y}_2 - 2 m_3 \ddot{y}_3 - m_1 g + m_2 g - 2 m_3 g) \delta y_2 + \\ + (m_3 \ddot{y}_3 - m_4 \ddot{y}_4 - m_3 g + m_4 g) \delta y_4 = 0 .$$

Przyrównując do zera wyrażenie stojące w nawiasie przy niezależnych przemieszczeniach przygotowanych dochodzi się do równań:

$$m_1 \ddot{y}_1 - m_2 \ddot{y}_2 - 2 m_3 \ddot{y}_3 - m_1 g + m_2 g + 2 m_3 g = 0 ,$$

$$m_3 \ddot{y}_3 - m_4 \ddot{y}_4 - m_3 g + m_4 g = 0 .$$

Z równań więzów wynikają zależności między przyspieszeniami:

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0 ,$$

$$\ddot{y}_3 + \ddot{y}_4 - 2\ddot{y}_2 = 0 .$$

Podstawiając te zależności do równań otrzymanych z ogólnego równania dynamiki analitycznej i wykorzystując zadane wielkości mas, po przekształceniach otrzymuje się przyspieszenia poszczególnych ciał¹:

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{23}g , \quad \ddot{y}_2 = -\frac{1}{23}g ,$$

$$\ddot{y}_3 = -\frac{9}{23}g , \quad \ddot{y}_4 = \frac{7}{23}g .$$

3.2 Zasada prac przygotowanych

Z ogólnego równania dynamiki analitycznej (3.5)

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 ,$$

wynikają warunki, jakie muszą być spełnione w położeniu równowagi układu, tzn. takim położeniu, w którym układ znajduje się przez cały czas, jeżeli w chwili początkowej znajdował się on w tym położeniu i prędkości wszystkich jego punktów były wówczas równe zeru. Ponieważ $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_{0i} = \mathbf{const}_i$, to $\vec{a}_i = \vec{0}$, ($i = 1, \dots, N$). Zatem ogólne równanie dynamiki analitycznej w położeniu równowagi układu przybiera postać

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 . \tag{3.7}$$

Równość (3.7) wyraża zasadę prac przygotowanych.

- Aby pewne położenie układu, zgodne z więzami idealnymi, było jego położeniem równowagi, potrzeba i wystarcza, żeby w tym położeniu suma prac sił aktywnych

¹Procedura umożliwiająca rozwiązanie otrzymanego układu równań przy użyciu programu *wxMaxima* jest podana na stronie 215.

na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych była równa zeru.

W postaci rozwiniętej równość (3.7) można zapisać

$$\delta L = \sum_{i=1}^N (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0. \quad (3.8)$$

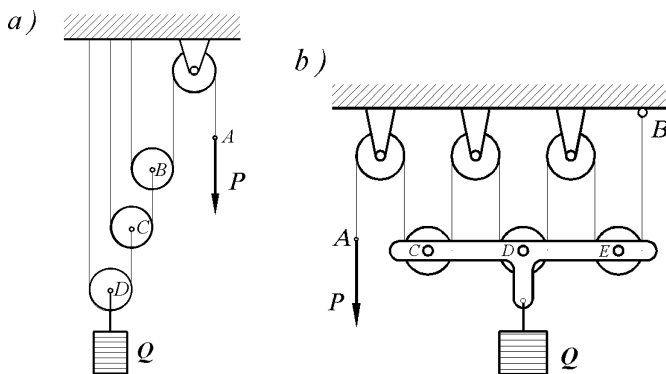
Jeśli siły działające na punkty układu materialnego mają potencjał, tzn. istnieje taka funkcja V , że:

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad (3.9)$$

równanie (3.8) przybiera postać

$$\delta L = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right) = -\delta V = 0. \quad (3.10)$$

Przykład 3.2.31. Dla układu wielokrążków pokazanych na rysunkach 3.3a i 3.3b wyznaczyć zależność między siłami P i Q , jeśli wiadomo, że układy znajdują się w równowadze.



Rysunek 3.3: a) Wielokrążek potęgowy, b) wielokrążek sumowy (wielokrotny)

Wielokrążek przedstawiony na rys. 3.3a jest w równowadze, jeśli spełniony jest warunek

$$\delta L = \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_D = P \delta y_A + Q \delta y_D = 0.$$

W układzie występują trzy liny o stałych długościach l_1, l_2, l_3 , co może być wykorzystane w ustalaniu związków między przemieszczeniami przygotowanymi:

$$2 y_B + y_A - l_1 = 0, \quad 2 y_C - y_B - l_2 = 0, \quad 2 y_D - y_C - l_3 = 0,$$

stąd

$$2 \delta y_B = -\delta y_A, \quad 2 \delta y_C = \delta y_B, \quad 2 \delta y_D = \delta y_C.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\delta y_D = \frac{1}{2} \delta y_C = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \delta y_B = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \delta y_A = -\frac{1}{8} \delta y_A.$$

Po podstawieniu ostatniej zależności do wyrażenia na pracę przygotowaną

$$\delta L = \left(P - \frac{1}{8} Q \right) \delta y_A = 0,$$

stąd

$$P = \frac{1}{8} Q.$$

Dla drugiego układu wielokrażków (rys. 3.3-b) praca przygotowana jest równa

$$\delta L = \vec{\mathbf{P}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_A + \vec{\mathbf{Q}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_D = P \delta y_A + Q \delta y_D = 0.$$

Przemieszczenia przygotowane są zależne, ponieważ

$$y_A + 6 y_D - l = 0,$$

a zatem

$$\delta y_D = -\frac{1}{6} \delta y_A.$$

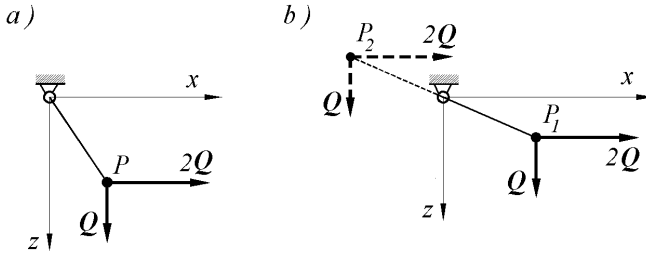
Po podstawieniu δy_D do równania na pracę przygotowaną otrzymujemy

$$\delta L = \left(P - \frac{1}{6} Q \right) \delta y_A = 0,$$

czyli

$$P = \frac{1}{6} Q.$$

Wartość siły P dla wielokrażka sumowego ($P = \frac{1}{6} Q$) jest większa niż dla wielokrażka potęgowego ($P = \frac{1}{8} Q$).



Rysunek 3.4: a) Obciążenie punktu, b) położenia równowagi

Przykład 3.2.32. Punkt materialny P o ciężarze Q jest połączony z nieprzesuwłą podporą przegubową nierozciągliwą i nieważką nicią (lub prętem) o długości l . Na punkt działa pozioma stała siła o wartości $2Q$ (rys. 3.4). Określić położenie równowagi.

Wprowadzimy prostokątny układ współrzędnych o poziomej osi x i pionowej zwróconej do dołu osi z . Korzystając z zasady prac przygotowanych, możemy dla położenia równowagi napisać

$$\delta L = 2\vec{Q} \cdot \delta\vec{r}_P + \vec{Q} \cdot \delta\vec{r}_P = 2Q \delta x + Q \delta z = 0.$$

Na punkt nałożone są więzy o postaci

$$f \equiv x^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

czyli przemieszczenia przygotowane są związane zależnością

$$2x \delta x + 2z \delta z = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$\delta x = -\frac{z}{x} \delta z.$$

Po wykorzystaniu powyższej zależności wyrażenie na pracę przygotowaną przybiera postać

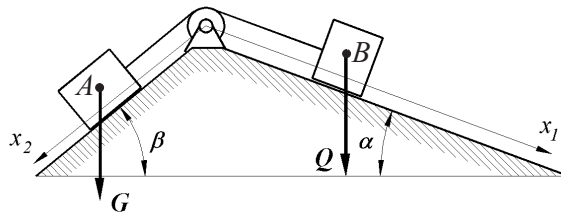
$$\delta L = 2Q \left(-\frac{z}{x} \delta z \right) + Q \delta z = \left(-2\frac{z}{x} + 1 \right) Q \delta z = 0.$$

Równanie to będzie spełnione (czyli punkt będzie w równowadze), jeżeli $2z = x$. Wstawiając ten warunek do równania więzów, otrzymuje się

$$(2z)^2 + z^2 - l^2 = 5z^2 - l^2 = 0.$$

Istnieją dwa rozwiązania określające położenia równowagi: $P_1 \left(\frac{2l}{\sqrt{5}}, \frac{l}{\sqrt{5}} \right)$, $P_2 \left(-\frac{2l}{\sqrt{5}}, -\frac{l}{\sqrt{5}} \right)$. Z rysunku 3.4 wynika, że w przypadku gdy punkt jest zawieszony na nici, sens fizyczny ma tylko jedno rozwiązanie (P_1). Gdy punkt jest połączony z ostoją za pomocą pręta, możliwe są dwa położenia równowagi (P_1 i P_2).

Przykład 3.2.33. Dwie małe kostki połączone nierozciągliwą nicią ustawiono na gładkich płaszczyznach klina (rys. 3.5) nachylonych do poziomu pod kątami α i β . Wyznaczyć związek między ciężarami (G i Q) kostek, jeśli wiadomo, że znajdują się one w równowadze.



Rysunek 3.5: Model układu

Wprowadzimy osie współrzędnych skierowane równolegle do krawędzi klina (rys. 3.5). Z zasady prac przygotowanych wynika, że

$$\delta L = \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{G} \cdot \delta \vec{r}_A = Q \sin \alpha \delta x_1 + G \sin \beta \delta x_2 = 0 .$$

Ruch punktów jest ograniczony nałożonymi więzami o postaci

$$f \equiv x_1 + x_2 - l = 0 ,$$

czyli przemieszczenia przygotowane są związane zależnością

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 ,$$

czyli

$$\delta x_2 = -\delta x_1 .$$

Po wykorzystaniu powyższej zależności wyrażenie na pracę przygotowaną przybiera postać

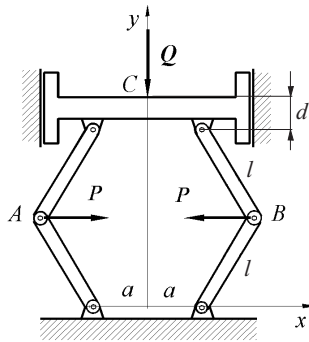
$$\delta L = (Q \sin \alpha - G \sin \beta) \delta x_1 = 0 .$$

Ostatnie równanie będzie spełnione, jeżeli

$$Q = G \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

co oznacza, że dla takiej wartości Q ciała będą w równowadze.

Przykład 3.2.34. Określić liczbę stopni swobody układu pokazanego na rys. 3.6. Następnie, korzystając z zasady prac przygotowanych, określić wielkość siły P koniecznej do utrzymania układu w położeniu równowagi określonym współrzędnymi punktów A i B ($x_A = -b$, $y_A = c$, $x_B = b$, $y_B = c$). Konstrukcję przyjmując jako lekką, a wieży jako idealne. Wielkości zadane to Q , a , b i c .



Rysunek 3.6: Model prasy

W położeniu równowagi powinna być spełniona zależność wynikająca z zasady prac przygotowanych

$$\delta L = \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_B = P \delta x_A - Q \delta y_C - P \delta x_B = 0.$$

Na współrzędne y_C , x_B , x_A punktów, do których są przyłożone siły, nałożone są więzy o postaci:

$$\begin{aligned} f_1 : x_A + x_B &= 0, \\ f_2 : (x_B - a)^2 + y_B^2 - l^2 &= 0, \\ f_3 : y_C - 2y_B - d &= 0, \end{aligned}$$

gdzie użyte zostały pomocnicze wielkości a , d , l (rys. 3.6). Rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody. (Do opisu położenia trzech punktów leżących na płaszczyźnie potrzeba $n = 2N - k = 2 \cdot 3 - k = 6 - k$ współrzędnych. W tym przypadku,

podany układ równań więzów należałoby jeszcze uzupełnić o dwa oczywiste związki: $f_4: y_C - 2y_A - d = 0$, $f_5: x_C = 0$, a jako liczbę równań więzów przyjąć $k = 5$).

Wynikające ze związków pomiędzy współrzędnymi przemieszczenia przygotowane są związane zależności:

$$\delta x_A + \delta x_B = 0,$$

$$2(x_B - a)\delta x_B + 2y_B\delta y_B = 0,$$

$$\delta y_C - 2\delta y_B = 0,$$

skąd otrzymuje się:

$$\delta y_B = -\frac{x_B - a}{y_B}\delta x_B,$$

$$\delta y_C = 2\delta y_B = -2\frac{x_B - a}{y_B}\delta x_B,$$

$$\delta x_A = -\delta x_B.$$

Po wprowadzeniu powyższych zależności do pierwszego równania

$$\delta L = \left(-2P + 2Q\frac{x_B - a}{y_B}\right)\delta x_B = 0,$$

a po rozwiązaniu

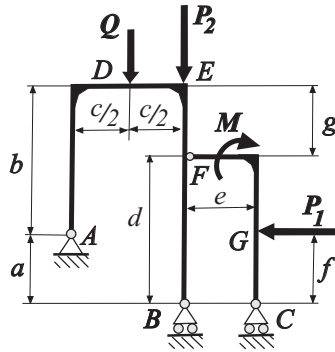
$$P = Q\frac{b - a}{c}.$$

Wyznaczony wynik przedstawia związek pomiędzy siłami P i Q w położeniu równowagi układu.

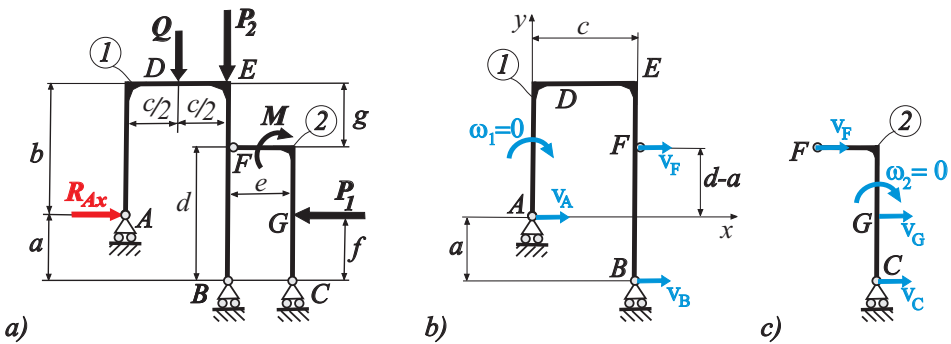
Przykład 3.2.35. Na rysunku 3.7 jest przedstawiony model konstrukcji wraz z działającymi na niego obciążeniami. Położenie układu przedstawione na rysunku jest położeniem równowagi. Dla danych obciążeń i wymiarów wyznaczyć składową R_{Ax} reakcji podpory w punkcie A , używając do tego celu zasady prac przygotowanych (Ciężar konstrukcji pominąć).

Podporę przegubową nieprzesuwną w punkcie A (rys. 3.7) zastępujemy podporą, która ma możliwość przesuwania się w kierunku osi x i wprowadzamy poszukiwaną siłę reakcji R_{Ax} (rys. 3.8a).

Rozpatrując możliwe prędkości punktów A i B ciała 1 przy założeniu, że prędkość \vec{v}_A ma kierunek poziomy (rys. 3.8b) stwierdzamy, że ciało 1 jak i ciało 2 porusza się ruchem postępowym ($\omega_1 = \omega_2 = 0$), a zatem prędkości wszystkich punktów obu ciał są jednakowe ($\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_F = \vec{v}_G = \dots$).



Rysunek 3.7: Model konstrukcji – położenie równowagi



Rysunek 3.8: Model konstrukcji – oznaczenia użyte w rozwiązaniu

Równanie określające pracę przygotowaną sił czynnych i poszukiwanej reakcji R_{Ax} ma postać

$$\delta L = \vec{\mathbf{R}}_{Ax} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_A + \vec{\mathbf{P}}_1 \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_G = (\vec{\mathbf{R}}_{Ax} \cdot \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{P}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_G) dt = (R_{Ax} - P_1) v_G dt = 0,$$

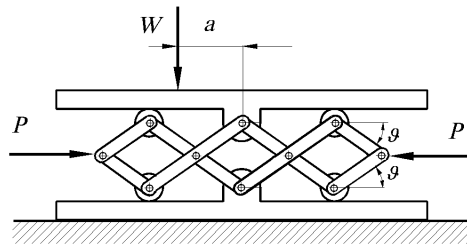
co oznacza, że musi być spełniony następujący warunek (równowagi)

$$R_{Ax} - P_1 = 0,$$

a zatem $R_{Ax} = P_1$.

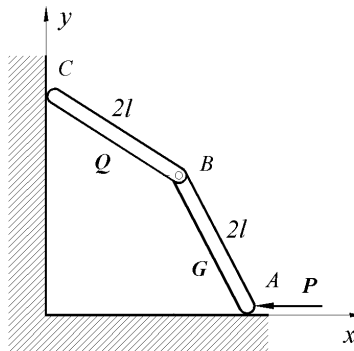
3.2.1 Zadania do rozwiązania – zasada prac przygotowanych we współrzędnych kartezjańskich

Zadanie 36. Podać liczbę stopni swobody układu pokazanego na rys. 3.9. Następnie, korzystając z zasady prac przygotowanych we współrzędnych kartezjańskich, określić wielkość siły P koniecznej do utrzymania układu w położeniu równowagi. Konstrukcję przyjąć jako lekką, a więzy jako idealne. Pręty mają długości równe l i $2l$. Wielkości zadane to obciążenie W i kąt ϑ (Odpowiedź: $P = \frac{1}{3}W \operatorname{ctg}\vartheta$).



Rysunek 3.9: Platforma–podnośnik

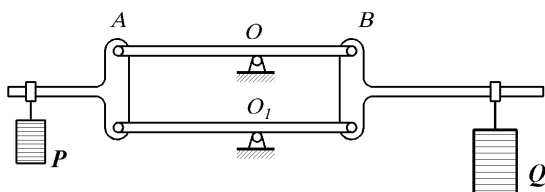
Zadanie 37. Dla układu złożonego z dwóch ciężkich prętów połączonych przegubowo i opierających się o gładkie powierzchnie (rys. 3.10) wyznaczyć ciężary prętów Q i G , przy których układ pozostanie w równowadze w położeniu określonym za pomocą współrzędnych: $x_A = a$, $x_B = b$, $y_B = c$. Dane są ponadto siła P i długości prętów $2l$.



Rysunek 3.10: Rysunek do zadania 37

(Odpowiedź: $G = \frac{2P}{b(a-b)}(bc - 2\sqrt{4l^2 - b^2}(a - b))$, $Q = \frac{P}{b}(2\sqrt{4l^2 - b^2})$).

Zadanie 38. Wykazać, że zależność między siłami P i Q wagi – pokazanej na rys. 3.11 – w położeniu równowagi nie zależy od położenia punktów przyłożenia sił. Ciężar prętów jest pomijalnie mały w porównaniu z zadanymi ciężarami Q i P . Wymiary ramion wagi wynoszą odpowiednio $OA = 2a$, $OB = a$ (Odpowiedź: $P = Q/2$).

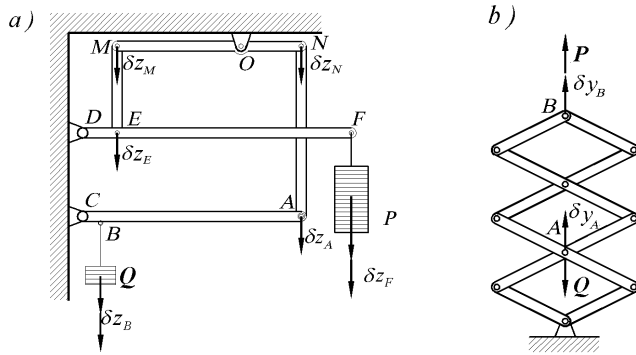


Rysunek 3.11: Model wagi

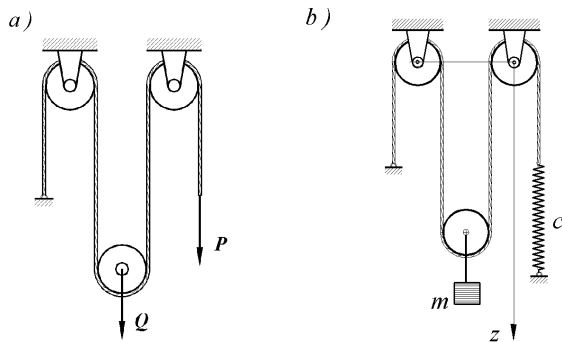
Zadanie 39. Wyznaczyć ciężar P , jeśli ważenie przy użyciu obciążnika wykazuje, że dla osiągnięcia położenia równowagi znany ciężar Q przesunięto na odległość CB (rys. 3.12a). Dane są długości odcinków $CA = a$, $CB = b$, $DE = e$, $DF = f$, $MO = d$, $ON = c$. Ciężary prętów pominąć (Odpowiedź: $P = Q \frac{bce}{adf}$).

Zadanie 40. Określić wielkość siły P koniecznej do utrzymania układu – pokazanego na rys. 3.12b – w położeniu równowagi. Ciężar prętów jest pomijalnie mały w porównaniu z zadanym ciężarem Q . Wymiary prętów wynoszą odpowiednio a i $2a$ (Odpowiedź: $P = Q/3$).

Zadanie 41. Znaleźć zależność między siłami P i Q układu – pokazanego na rys. 3.13a – w położeniu równowagi. Ciężar krążków i liny jest pomijalnie mały w porównaniu z zadanymi obciążeniami Q i P (Odpowiedź: $P = Q/2$).



Rysunek 3.12: Rysunki do zadań 39 (a) i 40 (b)



Rysunek 3.13: Rysunki do zadań 41 i 42

Zadanie 42. Wyznaczyć wydłużenie sprężyny w położeniu równowagi dla układu pokazanego na rys. 3.13b. Dane są masa obciążnika m i współczynnik sztywności sprężyny c . Ciężary krążków i liny są pomijalnie małe (*Odpowiedź:* $\lambda = \frac{m g}{2c}$).

3.3 Zasada d'Alemberta

Zasada prac przygotowanych jest szczególnym przypadkiem ogólnego równania dynamiki. Ogólne równanie dynamiki można uważać za równanie wyrażające zasadę przemieszczeń przygotowanych i charakteryzujące położenie równowagi względnej układu, które otrzymuje się przez dołączenie do aktywnych sił $\vec{\mathbf{F}}_i$ jeszcze dodatkowo pewnych fikcyjnych "sił" $\vec{\mathbf{B}}_i = -m \vec{\mathbf{a}}_i$ ($i = 1, \dots, N$), nazywanych siłami bezwładności. Zasada d'Alemberta stwierdza, że: przy ruchu układu dowolne jego położenie można uważać za położenie równowagi, jeżeli do sił aktywnych, działających na układ w tym położeniu, dodać "siły" bezwładności.

Stosując zasadę d'Alemberta można przenieść sposoby i metody stosowane przy rozwiązywaniu zagadnień statycznych na zagadnienia dynamiki. Pozwala ona – za pomocą metod zbliżonych do statyki – określić dynamiczne siły reakcji. W położeniu równowagi względnej reakcje $\vec{\mathbf{R}}_i$ różnią się jedynie zwrotem od sił $\vec{\mathbf{F}}_i - m \vec{\mathbf{a}}_i$

$$\vec{\mathbf{F}}_i - m_i \vec{\mathbf{a}}_i = -\vec{\mathbf{R}}_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.11)$$

Po wprowadzeniu do równania (3.11) sił bezwładności mamy

$$\vec{\mathbf{F}}_i + \vec{\mathbf{B}}_i = -\vec{\mathbf{R}}_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.12)$$

Mnożąc skalarnie równania (3.12) przez odpowiednie przemieszczenia przygotowane $\delta \vec{\mathbf{r}}_i$ i dodając je stronami, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^N (\vec{\mathbf{F}}_i + \vec{\mathbf{B}}_i) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N -\vec{\mathbf{R}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i. \quad (3.13)$$

Prawa strona równania (3.13) dla układów o więzach idealnych jest zawsze równa zero. Mamy więc

$$\sum_{i=1}^N (\vec{\mathbf{F}}_i + \vec{\mathbf{B}}_i) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0. \quad (3.14)$$

Równanie (3.14) określa zasadę d'Alemberta. Przytoczone tu sformułowanie zasady d'Alemberta (3.14) można uzupełnić następującym komentarzem. Rozpatrując siły bezwładności jako dodatkowe siły aktywne, przyłożone do punktów materialnych układu, zastępujemy rozważany problem dynamiki

nowym zadaniem – zadaniem statyki. Reakcje statyczne w tym nowym zadaniu pokrywają się z szukanymi reakcjami w pierwotnie rozważanym problemie dynamiki.

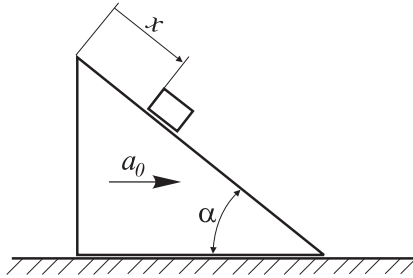
Zastosowanie zasady d'Alemberta do rozwiązywania zagadnień dynamiki jest pokazane na kilku przykładach.

Przykład 3.3.43. Punkt materialny o masie m umieszczono na gładkiej powierzchni równi (rys. 3.14) poruszającej się ze stałym przyspieszeniem \vec{a}_0 . Wyznaczyć przyspieszenie względne punktu.

Wykorzystując zasadę d'Alemberta, możemy napisać

$$(m \vec{g} + \vec{B}) \cdot \delta \vec{r} = 0,$$

gdzie siła bezwładności $\vec{B} = -m(\vec{a}_0 + \vec{i}, \ddot{x})$, a przemieszczenie przygotowane skierowane jest wzdłuż krawędzi równi $\delta \vec{r} = \vec{i} \delta x$ (porównaj przykład na s. 45).



Rysunek 3.14: Punkt materialny na ruchomym klinie

Podstawiając powyższe do pierwszego równania, mamy

$$(m \vec{g} - m(\vec{a}_0 + \vec{i} \ddot{x})) \cdot \vec{i} \delta x = (m g \sin \alpha - m(a_0 \cos \alpha + \ddot{x})) \delta x = 0.$$

Równanie będzie spełnione, gdy współczynnik stojący przy δx będzie równy zero

$$m g \sin \alpha - m(a_0 \cos \alpha + \ddot{x}) = 0,$$

skąd ostatecznie otrzymuje się

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - a_0 \cos \alpha.$$

Przykład 3.3.44. Punkt materialny o masie m może poruszać się po gładkiej krzywej obracającej się (ze stałą prędkością kątową ω) wokół pionowej osi z . Równanie krzywej ma postać $z = b \xi^2$, przy czym ξ oznacza odległość punktu od osi z , a b jest zadaną stałą wielkością (rys. 3.15). Wyznaczmy wartość prędkości kątowej, przy której punkt znajduje się w równowadze względnej (względem obracającego się pręta).

Zgodnie z zasadą d'Alemberta można napisać

$$(m \vec{g} + \vec{B}) \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

W położeniu równowagi względnej prędkość i przyspieszenie w ruchu względnym są równe zero, zatem siła bezwładności – przy stałej prędkości kątowej ω – jest określona jako

$$\vec{B} = m \omega^2 (\vec{i} x + \vec{j} y).$$

Więzy ograniczające ruch punktu ($z = b \xi^2 \equiv b(x^2 + y^2)$ oraz $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$) można przedstawić w formie:

$$f_1 = z - b(x^2 + y^2) = 0,$$

$$f_2 = y - x \text{tg}(\omega t) = 0.$$

Zależności pomiędzy przemieszczeniami przygotowanymi:

$$\delta z = 2 b x \delta x + 2 b y \delta y,$$

$$\delta y = \text{tg}(\omega t) \delta x.$$

Wobec tego – na podstawie zasady d'Alemberta – można napisać równanie

$$B_x \delta x + B_y \delta y + (-m g - m \ddot{z}) \delta z = 0,$$

gdzie:

$$B_x = m \omega^2 x, B_y = m \omega^2 y.$$

Podstawiając wielkości B_x , B_y , δy oraz δz w formie

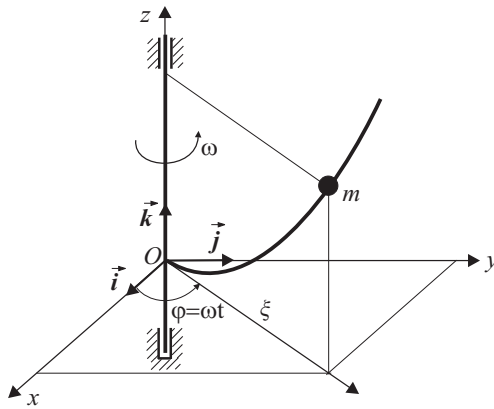
$$\delta z = 2 b x (1 + \text{tg}^2(\omega t)) \delta x$$

i przyjmując $\ddot{z} = 0$, otrzymuje się równanie o postaci

$$m(\omega^2 - 2bg)(1 + \operatorname{tg}^2(\omega t))x \delta x = 0.$$

Oznacza to, że – wobec niezależności przemieszczenia przygotowanego δx oraz wobec faktu, że $(1 + \operatorname{tg}^2(\omega t)) > 0$ – musi być spełnione równanie

$$(-2bg + \omega^2)x = 0.$$



Rysunek 3.15: Punkt materialny na obracającej się krzywej

Rozpatrywany w zadaniu punkt materialny, umieszczony na gładkiej krzywej $(z = b \xi^2)$ obracającej się ze stałą prędkością kątową ω , będzie zawsze w równowadze względnej w położeniu, w którym $x = 0$, natomiast gdy $\omega^2 = 2bg$, to każde jego położenie jest położeniem równowagi.

3.4 Równania Lagrange'a I-go rodzaju

Zakładamy, że dany jest pewien zgodny z więzami ruch układu, dla którego spełnione jest drugie prawo Newtona. Wówczas można napisać

$$\vec{\mathbf{R}}_i = m_i \vec{\mathbf{a}}_i - \vec{\mathbf{F}}_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.15)$$

Po pomnożeniu obu stron równości (3.15) przez przemieszczenia przygotowane $\delta \vec{\mathbf{r}}_i$, a następnie dodaniu wszystkich równań stronami otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{R}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{\mathbf{a}}_i - \vec{\mathbf{F}}_i) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i. \quad (3.16)$$

Przy założeniu, że reakcje $\vec{\mathbf{R}}_i$ są reakcjami więzów idealnych ($\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{R}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0$), równanie (3.16) sprowadza się do – przedstawionego w punkcie 3.1 – ogólnego równania dynamiki analitycznej

$$\sum_{i=1}^N (m_i \vec{\mathbf{a}}_i - \vec{\mathbf{F}}_i) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0. \quad (3.17)$$

Przemieszczenia przygotowane występujące w równaniach (3.17) muszą spełniać zależności wynikające z istniejących więzów (geometrycznych i z nałożonych więzów kinematycznych, ale zależnych liniowo od prędkości):

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (p = 1, \dots, k), \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{l}}_{si} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (s = 1, \dots, r), \quad (3.19)$$

a więc są od siebie zależne.

Mnożąc każde z równań (3.18) przez $-\lambda_p$, a każde z równań (3.19) przez $-\mu_s$ i dodając je do siebie, otrzymuje się

$$-\sum_{i=1}^N \left(\sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (3.20)$$

oraz

$$-\sum_{i=1}^N \left(\sum_{s=1}^r \mu_s \vec{l}_{si} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.21)$$

Dodając (3.20) i (3.21) do równania (3.17) otrzymuje się również jedno równanie o postaci

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i - \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} - \sum_{s=1}^r \mu_s \vec{l}_{si} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.22)$$

W równaniu (3.22) występują przemieszczenia przygotowane zależne (ich ilość jest równa $k + r$) i niezależne (w ilości $N - (k + r)$). Można tak dobrać wprowadzone mnożniki λ_p i μ_s , aby współczynniki stojące przy zależnych przemieszczeniach były równe zero. Na to, by równanie (3.22) było zawsze spełnione, wszystkie współczynniki stojące przy niezależnych przemieszczeniach przygotowanych muszą być również równe zero. W ten sposób otrzymuje się następujący układ równań:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s \vec{l}_{si}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.23)$$

Układ równań (3.23) nosi nazwę równań Lagrange'a pierwszego rodzaju. Równania (3.23) można rozwiązać, jeśli dołączy się do nich równania więzów (geometrycznych i/lub kinematycznych) nałożonych na ruch rozpatrywanego układu:

$$f_p(\vec{r}_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (3.24)$$

$$g_s = \sum_{i=1}^N \vec{l}_{si} \dot{\vec{r}}_i + d_s = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (3.25)$$

Zastępując każde wektorowe równanie (3.23) przez trzy równania skalarne:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s a_{si}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.26)$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s b_{si}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.27)$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s c_{si}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.28)$$

i przedstawiając równania więzów (3.24)–(3.25) w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich:

$$f_p(t, x_i, y_i, z_i) = 0, \quad (p = 1, \dots, k), \quad (3.29)$$

$$g_s = \sum_{i=1}^N (a_{si} \dot{x}_i + b_{si} \dot{y}_i + c_{si} \dot{z}_i) + d_s = 0, \quad (s = 1, \dots, r), \quad (3.30)$$

można stwierdzić, że równania (3.26)–(3.28) i (3.29)–(3.30) tworzą układ złożony z $3N + k + r$ równań o $3N + k + r$ niewiadomych wielkościach skalarnych $x_i, y_i, z_i, \lambda_p, \mu_s$.

Rozwiązując układ równań (3.26)–(3.28) – po podstawieniu w nim zależności wynikających z równań więzów (3.29)–(3.30) – otrzymuje się równania ruchu w postaci skończonej (nie różniczkowej). Należy zaznaczyć, że rozwiązanie takiego układu równań różniczkowo-algebraicznych jest zazwyczaj kłopotliwe ze względu na konieczność stosowania specjalnych algorytmów numerycznych (odpowiednich dla układów DAE – *differential algebraic equations*), a także dużą liczbę równań. Dlatego też w praktyce równania Lagrange'a pierwszego rodzaju były dotychczas rzadko stosowane².

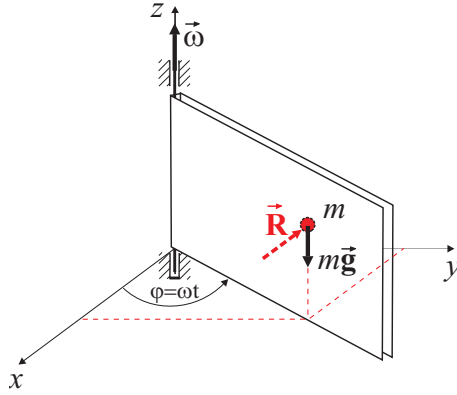
Aktualne możliwości programów matematycznych (takich jak *Mathematica*, *Mathcad*, *Maple*, *Maxima*) umożliwiają zastosowanie równań Lagrange'a I-go rodzaju do efektywnego rozwiązywania wielu zagadnień dynamiki układów mechanicznych.

Przykład 3.4.45. Punkt materialny o masie m znajduje się pomiędzy dwiema gładkimi, pionowymi płytami, które obracają się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi z (rys. 3.16). Napisać równania ruchu punktu.

Równanie więzów nałożonych na ruch punktu ($k = 1, r = 0$) ma postać

$$f_1 = x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t) = 0.$$

²Dalej będą wprowadzone równania Lagrange'a II-go rodzaju, w których liczba niewiadomych wielkości skalarnych wynosi $3N - k$, jest zatem o $2k + r$ mniejsza niż w układach równań (3.26)–(3.30).



Rysunek 3.16: Punkt materialny umieszczony pomiędzy dwiema obracającymi się, gładkimi, pionowymi płytami

Równania ruchu można otrzymać używając równań Lagrange'a I-go rodzaju (3.26)–(3.28):

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x},$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Po podstawieniu sił aktywnych ($F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -mg$) oraz pochodnych $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ otrzymuje się równania, które (łącznie z równaniem więzów) opisują ruch rozpatrywanego punktu:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin(\omega t), \quad m\ddot{y} = -\lambda_1 \cos(\omega t), \quad m\ddot{z} = -mg,$$

$$f_1 = x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t) = 0.$$

Rozwiązanie układu czterech równań różniczkowo-algebraicznych – wyznaczenie niewiadomych $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\lambda_1(t)$ – pozwala na opis ruchu układu (a także określenie siły reakcji $\vec{\mathbf{R}}$ – patrz s. 84).

Przykład 3.4.46. Rakieta samosterująca (punkt R) leci w kierunku poruszającego się celu (punkt C) (rys. 3.17). Napisać równania więzów oraz równania ruchu rakiety o masie m przy założeniu, że znane są funkcje $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ określające ruch celu ($\vec{r}_{OC} = \vec{i}a(t) + \vec{j}b(t) + \vec{k}c(t)$).

Wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych xyz . Z warunku równoległości wektora prędkości (\vec{v}) i wektora łączącego raketę i cel (\vec{r}_{RC}) otrzymuje się

$$\frac{\dot{x}(t)}{a(t) - x(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{b(t) - y(t)} = \frac{\dot{z}(t)}{c(t) - z(t)}.$$

Powyższe równanie w standardowej postaci przyjmuje formę dwóch równań ($r = 2$) i są to niecałkowalne reonomiczne więzy różniczkowe liniowe:

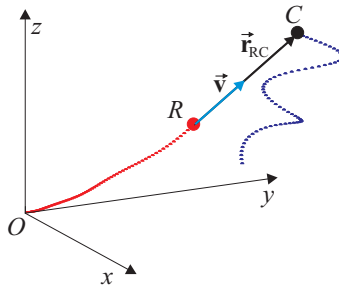
$$g_1 = (b(t) - y(t))\dot{x}(t) - (a(t) - x(t))\dot{y}(t) = 0,$$

$$g_2 = (c(t) - z(t))\dot{x}(t) - (a(t) - x(t))\dot{z}(t) = 0,$$

Z równań więzów należy wyznaczyć warunki początkowe (dla $t = 0$):

$$g_{10} = (b(0) - y(0))\dot{x}(0) - (a(0) - x(0))\dot{y}(0) = 0,$$

$$g_{20} = (c(0) - z(0))\dot{x}(0) - (a(0) - x(0))\dot{z}(0) = 0.$$



Rysunek 3.17: Tor rakiety samosterującej (punktu R) i celu (punktu C), oraz wektory położenia względnego (\vec{r}_{RC}) i prędkości rakiety (\vec{v})

Równania dynamiki dla rakiety zostały sformułowane na podstawie równań Lagrange'a I-go rodzaju z mnożnikami (3.26)–(3.28). W równaniach są

uwzględnione siły działające na raketę, przy czym założono, że siła napędu ma kierunek wektora prędkości:

$$F_x = \frac{k\dot{x}(t)}{v}, \quad F_y = \frac{k\dot{y}(t)}{v}, \quad F_z = \frac{k\dot{z}(t)}{v} - mg,$$

gdzie v oznacza wartość prędkości rakiety ($v = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$). Stąd otrzymuje się trzy równania ($N = 1, r = 2, k = 0$) o postaci:

$$\begin{aligned} r_1 &= m\ddot{x}(t) - \frac{k\dot{x}(t)}{v} + \mu_1(b(t) - y(t)) + \mu_2(c(t) - z(t)) = 0, \\ r_2 &= m\ddot{y}(t) - \frac{k\dot{y}(t)}{v} + \mu_1(x(t) - a(t)) = 0, \\ r_3 &= m\ddot{z}(t) + mg - \frac{k\dot{z}(t)}{v} + \mu_2(x(t) - a(t)) = 0. \end{aligned}$$

Z równań ($r_1 = 0$ i $r_2 = 0$) można wyznaczyć μ_1 i μ_2 i podstawić otrzymane zależności do $r_3 = 0$, wówczas:

$$\mu_1 = \frac{mv\ddot{y}(t) - k\dot{y}(t)}{v(a(t) - x(t))}, \quad \mu_2 = \frac{gmv - k\dot{z}(t) + mv\ddot{z}(t)}{v(a(t) - x(t))}$$

oraz

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) - \frac{k\dot{x}(t)}{v} + \frac{(b(t) - y(t))(mv\ddot{y}(t) - k\dot{y}(t))}{v(a(t) - x(t))} + \\ + \frac{(c(t) - z(t))(gmv - k\dot{z}(t) + mv\ddot{z}(t))}{v(a(t) - x(t))} = 0. \end{aligned}$$

Dwa brakujące równania różniczkowe można uzyskać różniczkując względem czasu równania więzów ($g_1 = 0, g_2 = 0$):

$$\begin{aligned} -\dot{y}(t)(a'(t) - \dot{x}(t)) - (a(t) - x(t))\ddot{y}(t) + \dot{x}(t)(b'(t) - \dot{y}(t)) + (b(t) - y(t))\ddot{x}(t) &= 0, \\ -\dot{z}(t)(a'(t) - \dot{x}(t)) - (a(t) - x(t))\ddot{z}(t) + \dot{x}(t)(c'(t) - \dot{z}(t)) + (c(t) - z(t))\ddot{x}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu jest zadaniem skomplikowanym. Rozwiązanie zostało wyznaczone numerycznie dla przyjętych danych:

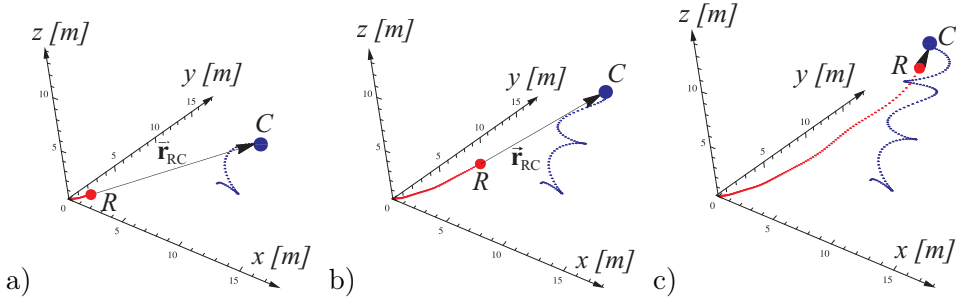
$$a(t) = 0, 75t - \cos(15t) + 13, 4, \quad b(t) = 3, 75t + \cos(12t) + 0, 5,$$

$$c(t) = 3, 75t - \cos(2, 5t) + 7, \quad m = 0, 1 \text{ kg}, \quad k = 2 \text{ N}$$

oraz założonych warunków początkowych,

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, 001 \text{ m/s}, \quad \dot{y}(0) = 0, 000121 \text{ m/s}, \\ \dot{z}(0) = 0, 000484 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Przebiegi zmian współrzędnych $x(t), y(t), z(t)$ – otrzymane z rozwiązania numerycznego – dla $t = 0, 6 \text{ s}, t = 1, 1 \text{ s}$ oraz $t = 1, 6 \text{ s}$ – są pokazane na rys. 3.18.



Rysunek 3.18: Model lotu rakiety samosterującej – tor rakiety (R) i celu (C) w kolejnych fazach ruchu: a) dla $t = 0,6$ s, b) dla $t = 1,1$ s, c) dla $t = 1,6$ s

3.5 Reakcje więzów

Porównując równania Lagrange'a pierwszego rodzaju (3.23)

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s \vec{l}_{si}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.31)$$

z równaniami dynamiki nieswobodnego układu punktów materialnych (3.1) w formie

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.32)$$

łatwo zauważyć, że wyrażenia określające reakcje \vec{R}_i można przedstawić jako

$$\vec{R}_i = \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s \vec{l}_{si}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.33)$$

W postaci skalarnej reakcje więzów są wyrażone zależnościami:

$$R_{ix} = \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s a_{si},$$

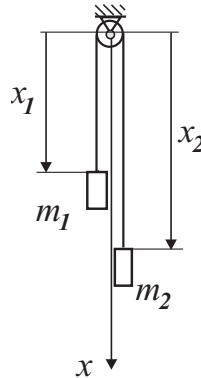
$$R_{iy} = \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s b_{si}, \quad (3.34)$$

$$R_{iz} = \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s c_{si},$$

przy czym $i = 1, \dots, N$.

Wzór (3.33) jest ogólnym wyrażeniem określającym reakcje więzów idealnych za pomocą nieoznaczonych mnożników Lagrange'a λ_p i μ_s ($p = 1, \dots, k$; $s = 1, \dots, r$). Z formy równania (3.33) wynika, że praktycznie reakcje można wyznaczyć rozwiązując najpierw równania Lagrange'a I-go rodzaju wraz z równaniami więzów. Po wyznaczeniu mnożników Lagrange'a (λ_p i μ_s) i wykorzystaniu równań (3.34) otrzymuje się nieznanne siły reakcji więzów idealnych.

Przykład 3.5.47. Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 połączone są nierozciągliwą linią przerzuconą przez gładki krążek (rys. 3.19). Wyznaczyć reakcje więzów (siły na obu końcach linii).



Rysunek 3.19: Układ punktów materialnych zawieszonych na linii

Zgodnie z rys. 3.19 równanie więzów ma postać

$$f = x_1 + x_2 - l = 0.$$

Reakcje więzów wyznaczymy z zależności:

$$R_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda, \quad R_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda.$$

W celu wyznaczenia występującego w równaniach mnożnika napiszemy równania Lagrange'a I-go rodzaju:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda.$$

Wykorzystując równanie więzów, mamy $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$. Po podstawieniu tej zależności w równaniach ruchu, po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\lambda = -\frac{2 m_1 m_2 g}{m_1} + m_2$$

Podstawiając powyższe do równań określających reakcje więzów, otrzymujemy wartości sił działających na końcach liny:

$$R_1 = -\frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}, \quad R_2 = -\frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Ujemne znaki otrzymane w wynikach rozwiązania świadczą o tym, że siły reakcji więzów (siły oddziaływania lin na ciała) mają zwroty przeciwne do zwrotu osi x .

Przykład 3.5.48. Punkt materialny o masie m znajduje się pomiędzy dwiema gładkimi, pionowymi płaszczyznami, które obracają się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi z (rys. 3.20). Wyznaczyć reakcję więzów.

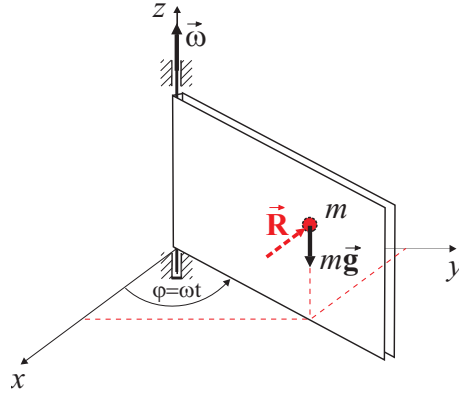
Równanie więzów nałożonych na ruch punktu ma postać

$$f_1 = x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t) = 0.$$

Wygenerowane na podstawie równań Lagrange'a I-go rodzaju równania ruchu:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin(\omega t), \quad m\ddot{y} = -\lambda_1 \cos(\omega t), \quad m\ddot{z} = -m g,$$

łącznie z równaniem więzów tworzą układ czterech równań różniczkowo algebraicznych. Analityczne rozwiązanie takiego układu równań jest zwykle kłopotliwe, a czasami niemożliwe. Alternatywą jest rozwiązanie numeryczne.



Rysunek 3.20: Punkt materialny umieszczony pomiędzy dwiema obracającymi się, gładkimi, pionowymi płaszczyznami – obciążenie i reakcja więzów

Jeśli do układu równań ruchu dołączymy równanie otrzymane przez dwukrotne zróżniczkowanie równania więzów, to jest równanie

$$\ddot{x} \sin(\omega t) + 2\omega \dot{x} \cos(\omega t) - \omega^2 x \sin(\omega t) - \ddot{y} \cos(\omega t) + 2\omega \dot{y} \sin(\omega t) + y\omega^2 \cos(\omega t) = 0,$$

to numeryczne rozwiązanie układu czterech równań różniczkowych drugiego rzędu przy użyciu odpowiednich programów matematycznych pozwala na efektywne rozwiązanie zadania. Po rozwiązaniu równań różniczkowych można wyznaczyć składowe reakcji oddziaływania więzów jako:

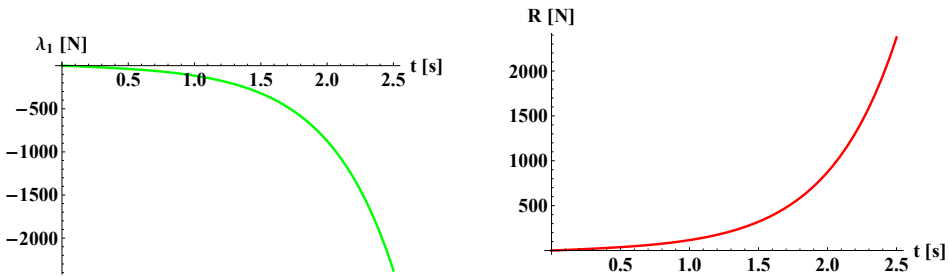
$$R_{1x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = \lambda_1 \sin(\omega t), \quad R_{1y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\lambda_1 \cos(\omega t),$$

$$R_{1z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$$

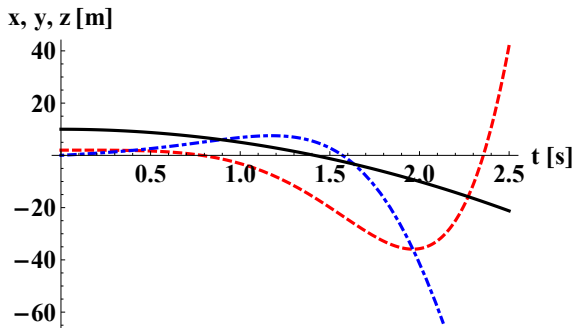
oraz wypadkową

$$R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2} = |\lambda_1|.$$

Zamieszczone rysunki (rys. 3.21-3.22) przedstawiają przebiegi czasowe zmian mnożnika Lagrange'a (λ_1) i siły reakcji R oraz współrzędnych x , y , z .



Rysunek 3.21: Przebiegi zmian mnożnika Lagrange'a (λ_1) i reakcji więzów (R) dla punktu materialnego umieszczonego pomiędzy dwiema obracającymi się płaszczyznami (dla danych: $m = 2$ kg, $\omega = 2$ rad/s, $x(0) = 2$ m, $y(0) = 0$, $z(0) = 10$ m, $\dot{y}(0) = 4$ m/s)



Rysunek 3.22: Przebieg współrzędnych dla punktu materialnego umieszczonego pomiędzy dwiema obracającymi się płaszczyznami ($x(t)$ – linia przerywana, $y(t)$ – linia punktowa, $z(t)$ – linia ciągła) (dla danych: $m = 2$ kg, $\omega = 2$ rad/s, $x(0) = 2$ m, $y(0) = 0$, $z(0) = 10$ m, $\dot{y}(0) = 4$ m/s)

Przykład 3.5.49. Wyznaczyć reakcję więzów nałożonych na punkt materialny (P) o masie m . Punkt wyrusza z początku układu współrzędnych OXY i porusza się w kierunku punktu geometrycznego (Z), o ruchu zadany równaniami $a(t) = a_o + r \cos(\omega t)$, $b(t) = b_o + r \sin(\omega t)$ (rys. 3.23). Rozwiązać zadanie w dwóch przypadkach:

- gdy jedyną siłą działającą na punkt materialny P jest siła reakcji więzów (\vec{R}),
- gdy dodatkowo działa siła (\vec{F}), o stałej wartości, skierowana w stronę stronę punktu geometrycznego Z .

Prędkość punktu P musi być równoległa do wektora (\vec{PZ}) łączącego punkt materialny i geometryczny, zatem równanie więzów kinematycznych ($r = 1$) nałożonych na ruch punktu ma postać

$$g = [b - y(t)] \dot{x}(t) - [a - x(t)] \dot{y}(t) = 0,$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$ są współrzędnymi punktu materialnego P , a $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ rzutami jego prędkości, natomiast a i b są zadanymi funkcjami czasu.

Reakcje więzów \vec{R} , w przypadku więzów nieholonomicznych, można przedstawić – zgodnie ze wzorem (3.35) – jako

$$\vec{R}_i = \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{s=1}^r \mu_s \vec{l}_{si}, \quad (i = 1, \dots, N)$$

co w omawianym zadaniu ($k = 0$, $r = 1$, $N = 1$, $\mu_1 \equiv \mu$) sprowadza się do

$$\vec{R}_1 \equiv \vec{R} = -\mu \vec{l}_{11}.$$

Składowe wektora $\vec{l}_{11} = \{a_{11}, b_{11}, c_{11}\}$ odczytujemy z równania więzów (są to czynniki mnożone przez rzuty prędkości, to znaczy: $a_{11} = b - y(t)$, $b_{11} = a - x(t)$, $c_{11} = 0$). W postaci skalarnej reakcja więzów jest wyrażona zależnościami:

$$R_x = -\mu a_{11} = -\mu [b - y(t)],$$

$$R_y = -\mu b_{11} = -\mu [a - x(t)].$$

Do wyznaczenia reakcji więzów konieczne jest określenie (z równań ruchu) nieoznaczonego mnożnika Lagrange'a μ . Równania ruchu wygenerowane na podstawie równań Lagrange'a I-go rodzaju mają formę:

$$m\ddot{x}(t) = -\mu [b - y(t)], \quad m\ddot{y}(t) = -\mu [a - x(t)].$$

Łącznie z równaniem więzów tworzą one układ trzech równań różniczkowo-algebraicznych. Z pierwszego z tych równań należy wyznaczyć mnożnik μ

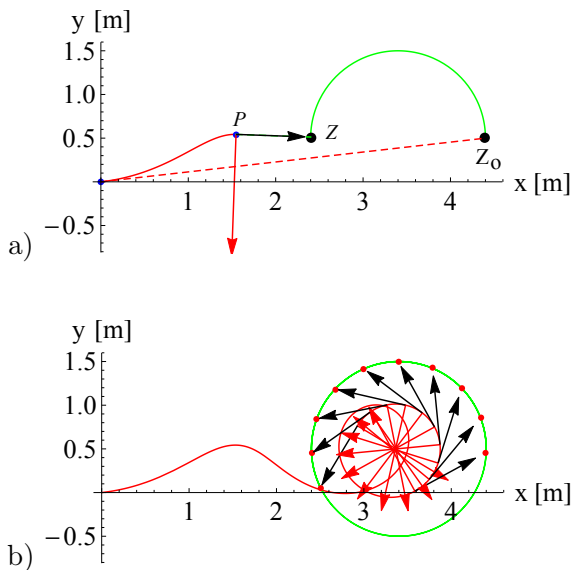
$$\mu = -\frac{m\ddot{x}(t)}{[b - y(t)]}$$

i wstawić do równania drugiego. Równanie więzów można zróżniczkować względem czasu. Prowadzi to do układu dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu z dwiema zmiennymi $x(t)$ oraz $y(t)$:

$$m\ddot{y}(t) = -\frac{m\ddot{x}(t)}{[b - y(t)]} [a - x(t)] ,$$

$$\dot{g} = [b - y(t)] \ddot{x}(t) - [a - x(t)] \ddot{y}(t) + [\dot{b} - \dot{y}(t)] \dot{x}(t) - [\dot{a} - \dot{x}(t)] \dot{y}(t) = 0 .$$

Analityczne rozwiązanie takiego układu równań jest niemożliwe. Alternatywą jest rozwiązanie numeryczne (rys. 3.23).



Rysunek 3.23: Model "pościgu" (przypadek a) – tor punktu materialnego P i geometrycznego Z oraz wektory prędkości punktu P (kolor czarny) i siły reakcji więzów (kolor czerwony)

Warunki początkowe (dla $t = 0$) niezbędne do rozwiązania numerycznego należy wyznaczyć z równania więzów

$$g(0) = [b(0) - y(0)] \dot{x}(0) - [a(0) - x(0)] \dot{y}(0) = 0,$$

co oznacza, że

$$\dot{y}(0) = \dot{x}(0) \frac{[b(0) - y(0)]}{[a(0) - x(0)]}.$$

Rozwiązanie numeryczne wyznaczone dla danych: $a_o = 3,4$ m, $b_o = 0,5$ m, $r = 1$ m, $\omega = 1,5$ rad/s, $m = 1$ kg oraz założonych warunków początkowych $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0,7875$ m/s i obliczonego $\dot{y}(0) = 0,0895$ m/s, jest zilustrowane na rys. 3.23. Przedstawione są tam trajektorie obu punktów oraz wektory prędkości punktu P i siły reakcji więzów $\vec{\mathbf{R}}$.

Rozwiązanie dla drugiego przypadku (b) musi uwzględniać zmianę w formie równań Lagrange'a. Wystąpi w nich stała co do wartości siła $\vec{\mathbf{F}}$ o rzutach na osie $F_x = F \frac{\dot{x}(t)}{v}$ i $F_y = F \frac{\dot{y}(t)}{v}$, skierowana wzdłuż wektora prędkości (dla uproszczenia zapisu w równaniach tych wprowadzono v – wartość prędkości równą $v = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$):

$$m\ddot{x}(t) = F_x - \mu [b - y(t)] , \quad m\ddot{y}(t) = F_y - \mu [a - x(t)] .$$

Z pierwszego równań wyznaczamy mnożnik μ

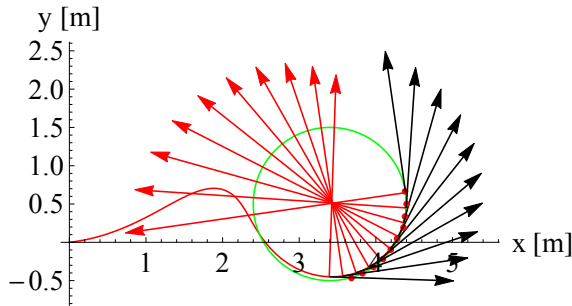
$$\mu = - \frac{m\ddot{x}(t) - F_x}{[b - y(t)]}$$

i wstawiamy do równania drugiego

$$m\ddot{y}(t) = F_y + \frac{m\ddot{x}(t) - F_x}{[b - y(t)]} [a - x(t)] .$$

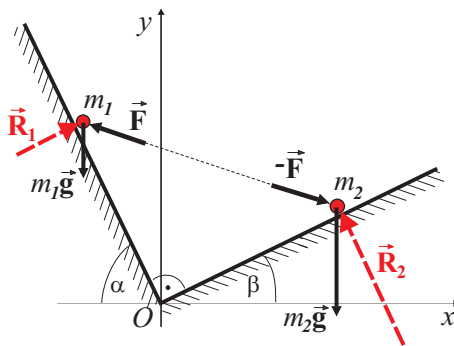
Równanie to, łącznie ze zróżniczkowanym równaniem więzów (pozostało bez zmiany), tworzy układ dwóch równań różniczkowych, który potrafimy rozwiązać numerycznie. Dane układu i warunki początkowe pozostają takie same jak w przypadku (a). Dodatkowo przyjęta jest wartość siły $F = 0,25$.

Wyniki rozwiązania numerycznego dla przypadku (b) są pokazane na rys. 3.24.



Rysunek 3.24: Model "pościgu" (przypadek b) – tor punktu materialnego P i geometrycznego Z oraz wektor prędkości punktu P (kolor czarny) i siły reakcji więzów (kolor czerwony)

Przykład 3.5.50. Wyznaczyć położenie równowagi i reakcje więzów dla układu złożonego z dwóch punktów materialnych o masach m_1, m_2 i współrzędnych (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) , pozostających na gładkich, wzajemnie prostopadłych prostych leżących w pionowej płaszczyźnie, nachylonych pod kątami α i β do poziomu ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ – rys. 3.25). Punkty odpychają się wzajemnie z siłą F wprost proporcjonalną do zmieniającej się odległości między nimi (współczynnik proporcjonalności jest równy c). Uwzględnić wpływ sił ciężkości.



Rysunek 3.25: Obciążenia i reakcje więzów działających na punkty materialne

Zadanie jest rozwiązane przy wykorzystaniu równań Lagrange'a I-go rodzaju.

Równania więzów nałożonych na układ:

$$f_1 = y_1 + x_1 \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad f_2 = y_2 - x_2 \operatorname{tg} \beta = 0,$$

są równaniami więzów geometrycznych, jednostronnych, skleronomicznych.

Równania Lagrange'a (liczba punktów $N = 2$, liczba współrzędnych i równań $2N = 4$, liczba równań więzów geometrycznych $k = 2$, więzów kinematycznych $r = 0$) – zgodnie z (3.26), (3.27) – mają w tym przypadku formę:

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_{1x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = F_{1y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1},$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_{2x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2},$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = F_{2y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2}.$$

Po podstawieniu odpowiednich wielkości składowych sił $\vec{\mathbf{F}}$ i $-\vec{\mathbf{F}}$ (rys. 3.25):

$$F_{1x} = -c(x_2 - x_1), \quad F_{1y} = -c(y_2 - y_1),$$

$$F_{2x} = c(x_2 - x_1), \quad F_{2y} = c(y_2 - y_1)$$

i uwzględnieniu, że w położeniu równowagi wszystkie składowe przyspieszeń muszą być równe zero, otrzymuje się równania:

$$0 = -c(x_2 - x_1) + \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha + \lambda_2 \cdot 0,$$

$$0 = -m_1 g - c(y_2 - y_1) + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0,$$

$$0 = c(x_2 - x_1) + \lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2 \operatorname{tg} \beta,$$

$$0 = -m_2 g + c(y_2 - y_1) + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2.$$

Rozwiązując powyższy układ równań – z dołączonymi równaniami więzów – można wyznaczyć współrzędne określające położenie równowagi:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\left(m_1 \operatorname{tg} \alpha \left(\operatorname{tg} \beta^2 + 1\right) + m_2 \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1)\right) g}{c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}, \\ y_1 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \left(m_1 \operatorname{tg} \alpha \left(\operatorname{tg} \beta^2 + 1\right) + m_2 \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1)\right) g}{c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}, \\ x_2 &= \frac{\left(m_1 \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1) + m_2 (\operatorname{tg} \alpha^2 + 1) \operatorname{tg} \beta\right) g}{c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}, \\ y_2 &= \frac{\operatorname{tg} \beta \left(m_1 \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1) + m_2 (\operatorname{tg} \alpha^2 + 1) \operatorname{tg} \beta\right) g}{c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}, \end{aligned}$$

oraz mnożniki Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \\ \lambda_2 &= \frac{(m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Na podstawie mnożników Lagrange'a można określić składowe reakcji więzów:

$$\begin{aligned} R_{1x} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha + \lambda_2 \cdot 0 = \frac{(m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \alpha, \\ R_{1y} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 = \frac{(m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \\ R_{2x} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2 \operatorname{tg} \beta = -\frac{(m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \beta, \\ R_{2y} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 = \frac{(m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, dla wartości kątów $\alpha = \beta = \pi/4$, otrzymuje się współrzędne punktów w położeniu równowagi:

$$x_1 = -\frac{m_1 g}{2c}, \quad y_1 = \frac{m_1 g}{2c},$$

$$x_2 = \frac{m_2 g}{2c}, \quad y_2 = \frac{m_2 g}{2c},$$

mnożniki Lagrange'a:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g$$

oraz reakcje więzów:

$$R_{1x} = \frac{(m_1 + m_2)g}{2}, \quad R_{1y} = \frac{(m_1 + m_2)g}{2},$$

$$R_{2x} = -\frac{(m_1 + m_2)g}{2}, \quad R_{2y} = \frac{(m_1 + m_2)g}{2}.$$

Znak minus przy składowej reakcji R_{2x} i dodatnie wartości pozostałych składowych świadczą o tym, że wyznaczone zwroty reakcji są zgodne z pokazanymi na rys. 3.25.

Rozdział 4

OPIS RUCHU WE WSPÓŁRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH

4.1 Współrzędne uogólnione

W nieswobodnym układzie N punktów materialnych, o k więzach geometrycznych, spośród $3N$ współrzędnych (np. kartezjańskich) określających położenia, tylko $3N - k$ jest niezależne. Pozostałe k współrzędnych może być wyznaczone z równań więzów.

Przykład 4.1.51. Punkt materialny pozostaje na płaszczyźnie. Dokonać podziału współrzędnych na niezależne i zależne.

W układzie kartezjańskim możemy to zapisać w postaci analitycznej

$$f_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 .$$

W analizowanym przykładzie $k = 1$, czyli liczba niezależnych współrzędnych (liczba stopni swobody) wynosi $3N - k = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Jedną współrzędną można wyznaczyć z równania więzów. Rozwiązując równanie względem z , otrzymujemy

$$z = -\frac{1}{C} (Ax + By + D) .$$

Oznacza to, że tylko x i y są niezależne i tylko one muszą być podane dla jednoznacznego określenia położenia punktu. (Wybór współrzędnych jest

umowny – jako współrzędne niezależne można przyjąć y i z , a x traktować jako zależną współrzędną).



Wynika stąd, że dla jednoznacznego określenia położenia układu wystarczy wprowadzić tylko $n = 3N - k$ niezależnych współrzędnych. Oznacza to, że liczba niezależnych współrzędnych określających położenie układu holonomicznego (o więzach geometrycznych) równa jest liczbie stopni swobody układu.

● **Współrzędne uogólnione są to niezależne współrzędne jednoznacznie określające położenie układu.**

Współrzędne uogólnione oznaczane będą jako q_1, q_2, \dots, q_n , a w skrócie q . Wprowadzając współrzędne uogólnione należy pamiętać, żeby spełnione były następujące warunki:

- wektory wodzące określające położenie punktów układu powinny być jednoznacznie określone $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$, ($i = 1, \dots, N$),
- współrzędne uogólnione powinny być wybrane zgodnie z równaniami więzów. Po ich wprowadzeniu do równań więzów równania te powinny przekształcić się w tożsamości, tzn. $f_p(t, \vec{r}_1(t, q), \dots, \vec{r}_N(t, q)) \equiv 0$, ($p = 1, \dots, k$).

Współrzędnymi uogólnionymi mogą być dowolne parametry spełniające równania więzów.

Przykład 4.1.52. Punkt materialny ma poruszać się po elipsie. Wprowadzić współrzędną uogólnioną.

Ograniczenie ruchu w układzie kartezjańskim możemy zapisać w postaci zależności

$$f_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

gdzie a, b oznaczają półosie elipsy.

Liczba stopni swobody punktu poruszającego się w płaszczyźnie (dla $N = 1, k = 1$) jest równa $n = 2N - k = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Wprowadzając współrzędną q , taką, że $x = a \cos q$, $y = b \sin q$, a następnie podstawiając tak określone wielkości do równania więzów, otrzymuje

się tożsamość

$$f_1 \equiv \frac{(a \cos q)^2}{a^2} + \frac{(b \sin q)^2}{b^2} - 1 \equiv 0.$$

Oznacza to, że współrzędna q jest współrzędną uogólnioną.

Jak wynika z przyjętych zależności wprowadzona współrzędna uogólniona q oznacza pewien kąt ($q = \alpha$). Można postawić pytanie: jaki to kąt?

Przykład 4.1.53. Dwa punkty materialne są połączone nieodkształcalnym prętem i pozostają podczas ruchu w płaszczyźnie OXY . Sprawdzić równania więzów po wprowadzeniu współrzędnych uogólnionych.

Równanie więzów w układzie kartezjańskim możemy zapisać w postaci

$$f_1 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 4l^2 = 0,$$

gdzie $2l$ oznacza długość pręta. Zatem liczba stopni swobody układu (dla $N = 2$, $k = 1$) jest równa $n = 2N - k = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Jako współrzędne uogólnione możemy przyjąć współrzędne środka pręta i kąt jaki tworzy on z osią OX , tzn. $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \alpha$. Mamy wówczas $x_1 = x + l \cos \alpha$, $y_1 = y + l \sin \alpha$ oraz $x_2 = x - l \cos \alpha$, $y_2 = y - l \sin \alpha$. Spełniony jest również warunek przechodzenia równania więzów w tożsamość

$$f_1 \equiv [(x - l \cos \alpha) - (x + l \cos \alpha)]^2 + [(y - l \sin \alpha) - (y + l \sin \alpha)]^2 - 4l^2 \equiv 0.$$

Przykład 4.1.54. Położenie ciała sztywnego jest określone w sposób jednoznaczny poprzez położenie trzech dowolnie wybranych punktów należących do tego ciała (Wyjątek stanowią punkty leżące na jednej prostej). Określić minimalną liczbę współrzędnych koniecznych do opisu położenia ciała.

Położenie trzech punktów P_i ($i = 1, 2, 3$) jest określone w układzie kartezjańskim przez współrzędne x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$), to jest poprzez 9 współrzędnych. Równania więzów – równania wynikające ze stałych odległości pomiędzy tymi punktami – można zapisać w postaci

$$f_p \equiv (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l_{ij}^2 = 0, \quad (i, j, p = 1, 2, 3; i \neq j),$$

gdzie l_{ij} oznacza odległość między punktami P_i i P_j .

W tym przypadku całkowita liczba współrzędnych $N = 9$, liczba równań więzów $k = 3$, stąd liczba niezależnych współrzędnych $n = N - k = 6$. Zatem położenie ciała sztywnego wymaga podania jedynie sześciu współrzędnych niezależnych.

Jednak sześć współrzędnych kartezjańskich – wybranych spośród dziewięciu – nie jest układem współrzędnych uogólnionych dla ciała sztywnego, gdyż trzy pozostałe współrzędne nie będą określone w sposób jednoznaczny na podstawie trzech znanych odległości pomiędzy punktami (Otrzymuje się cztery różne rozwiązania, którym odpowiadają cztery różne położenia ciała).

Najczęściej jako współrzędne uogólnione w opisie ruchu ciała sztywnego przyjmuje się współrzędne określające położenie jednego punktu (na przykład środka masy ciała) $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ oraz trzy kąty określające orientację przestrzenną ciała: $q_4 = \psi$, $q_5 = \vartheta$ i $q_6 = \varphi$. Kątami mogą być kąty Eulera (lub analogicznie wybierane kąty zwane quasi-eulerowskimi, na przykład kąty Cardano albo Bryanta i inne).

4.2 Prędkości i przyspieszenia uogólnione

Po wprowadzeniu współrzędnych uogólnionych promień wektor można zapisać

$$\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.1)$$

Pochodna względem czasu promienia wektora ma postać

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial t}. \quad (4.2)$$

We współrzędnych kartezjańskich wygląda to następująco:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \quad (4.4)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t}. \quad (4.5)$$

- Pochodne $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ nazywa się prędkościami uogólnionymi, a $\ddot{q}_k = \frac{d\dot{q}_k}{dt}$ przyspieszeniami uogólnionymi.

Po obliczeniu pochodnej prędkości punktu otrzymuje się związki między przyspieszeniami, prędkościami uogólnionymi i drugimi pochodnymi współrzędnych uogólnionych, które nazywają się przyspieszeniami uogólnionymi

$$\begin{aligned} \vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.3 Uogólnione przemieszczenia przygotowane

Przedstawienie położenia układu za pomocą współrzędnych uogólnionych pozwala na określenie związku między przemieszczeniami przygotowanymi i uogólnionymi przemieszczeniami przygotowanymi (między $\delta \mathbf{r}$ i δq). Biorąc pod uwagę (podobnie jak poprzednio) dwie możliwe prędkości punktu:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} , \quad (4.7)$$

$$\vec{v}'_i = \dot{\vec{r}}'_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}'_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (4.8)$$

i wynikające stąd zależności określające przemieszczenia możliwe:

$$d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt , \quad (4.9)$$

$$d'\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} d'q_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt . \quad (4.10)$$

Odejmując od siebie stronami równania (4.9) i (4.10), otrzymuje się

$$d\vec{r}_i - d'\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} (dq_k - d'q_k) , \quad (4.11)$$

a oznaczając różnicę $dq_k - d'q_k$ przez δq_k ($\delta q_k = dq_k - d'q_k$) i wykorzystując definicję $\delta \vec{\mathbf{r}}_i = d\vec{\mathbf{r}}_i - d'\vec{\mathbf{r}}_i$, można to zapisać

$$\delta \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.12)$$

We współrzędnych kartezjańskich związki (4.12) przyjmują postać:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta z_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (4.13)$$

4.4 Siły uogólnione

Ze związku określającego pracę przygotowaną

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i, \quad (4.14)$$

po wprowadzeniu do (4.14) zależności (4.12)

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \quad (4.15)$$

i prostych przekształceniach (zmiana kolejności sumowania)

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \delta q_k \left(\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \right), \quad (4.16)$$

otrzymuje się wyrażenie (ujęte w nawiasy), które określa siły uogólnione Q_k

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.17)$$

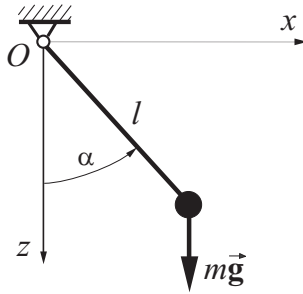
Zależność (4.14) po wprowadzeniu współrzędnych uogólnionych może być przedstawiona w postaci

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \delta q_k Q_k. \quad (4.18)$$

Jeśli siły działające na układ mają potencjał V , tzn. $\vec{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$ ($i = 1, \dots, N$), to zależność (4.17) można zapisać w postaci

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.19)$$

Przykład 4.4.55. Wyznaczyć postać siły uogólnionej działającej na wahadło matematyczne poruszające się w polu sił ciężkości (rys. 4.1).



Rysunek 4.1: Wahadło matematyczne

Jeśli masa wahadła wynosi m , długość l , a przyspieszenie ziemskie \vec{g} , to wyrażenie na pracę przygotowaną będzie miało postać

$$\delta L = m\vec{g} \cdot \delta \vec{r}.$$

Po wprowadzeniu współrzędnej uogólnionej $q = \alpha$, będącej kątem wychylenia wahadła

$$\delta L = m\vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

i uwzględniając, że promień wektor $\vec{r} = \vec{i}l \sin \alpha + \vec{k}l \cos \alpha$ oraz $\vec{g} = \vec{k}g$, otrzymuje się

$$\vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = (\vec{i}l \cos \alpha - \vec{k}l \sin \alpha) \cdot \vec{k}g.$$

Wyrażenie na pracę przygotowaną przybiera postać

$$\delta L = -mgl \sin \alpha \delta \alpha.$$

Współczynnik stojący przy $\delta\alpha$ jest poszukiwaną siłą uogólnioną Q_α , to znaczy

$$Q_\alpha = -mgl \sin\alpha .$$

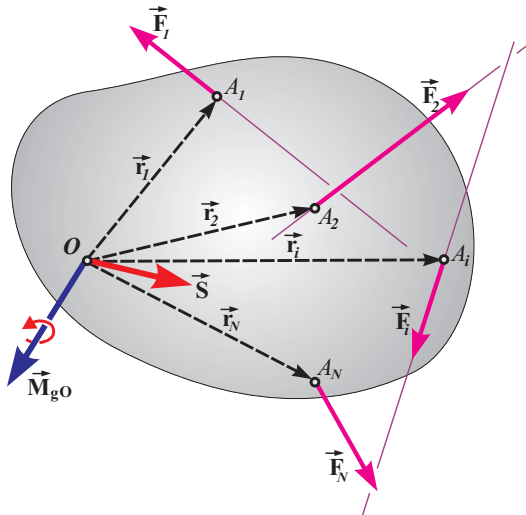
Siła uogólniona Q_α , odpowiadająca współrzędnej uogólnionej α , oznacza moment siły ciężkości działającej na wahadło, określony względem punktu O .

4.4.1 Praca przygotowana sił działających na ciało sztywne

Oznaczając przez \vec{F}_i siły działające na ciało sztywne (rys. 4.2), można wyznaczyć pracę przygotowaną sił działających na ciało jako

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i , \quad (4.20)$$

gdzie N jest liczbą punktów, w których są przyłożone siły.



Rysunek 4.2: Ciało sztywne – redukcja układu sił do punktu O (wektor główny – \vec{S} oraz moment główny sił względem punktu O – \vec{M}_{gO})

Wektor prędkości (\vec{v}_i) dowolnego punktu (A_i) ciała sztywnego jest określony zależnością

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{v}_{i/O} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i ,$$

przy czym \vec{v}_O oznacza prędkość wybranego bieguna (O), a $\vec{\omega}$ wektor prędkości kątowej ciała.

Wektor nieskończenie małego przemieszczenia możliwego dowolnego punktu (i) ciała sztywnego może być określony jako

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_O + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i . \quad (4.21)$$

Dla układu o więzach geometrycznych i skleronomicznych przemieszczenia możliwe i przemieszczenia przygotowane są identyczne – zatem wektor przemieszczenia przygotowanego dowolnego punktu ciała sztywnego można przedstawić formułą

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_O + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i , \quad (4.22)$$

gdzie przez $\delta\vec{r}_O$ oznaczono przemieszczenie wirtualne wybranego bieguna (O), a przez $\delta\vec{\varphi}$ wektor kąta małego przygotowanego obrotu ciała.

Po podstawieniu (4.22) do (4.20) otrzymuje się

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot (\delta\vec{r}_O + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)$$

lub

$$\delta L = \delta\vec{r}_O \cdot \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \delta\vec{\varphi} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) ,$$

gdzie wykorzystano tożsamość: $\vec{F}_i \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) \equiv \delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$.

Używając symbolu \vec{S} – dla oznaczenia wektora głównego sił działających na ciało oraz \vec{M}_{gO} – dla oznaczenia wektora momentu głównego sił (określonego względem punktu O), pracę przygotowaną sił działających na ciało sztywne można przedstawić w formie

$$\delta L = \vec{S} \cdot \delta\vec{r}_O + \vec{M}_{gO} \cdot \delta\vec{\varphi} , \quad (4.23)$$

gdzie:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i , \quad \vec{M}_{gO} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \quad (4.24)$$

są wektorami reprezentującymi siły uogólnione działające na ciało sztywne.

4.5 Zasada prac przygotowanych – sformułowanie we współrzędnych uogólnionych

Wprowadzenie współrzędnych uogólnionych do zasady prac przygotowanych

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0, \quad (4.25)$$

pozwała przedstawić ją w nowej formie. Przy przekształceniach wykorzystuje się związek $\delta \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \delta q_k$ oraz wprowadzone wzorem (4.17) siły uogólnione $Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}$. Po podstawieniu tych zależności do równania (4.25) otrzymuje się

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0. \quad (4.26)$$

- **Na to, by pewne – zgodne z więzami idealnymi – położenie układu było jego położeniem równowagi, potrzeba i wystarcza, żeby w tym położeniu suma prac sił uogólnionych (Q_k) na dowolnych uogólnionych przemieszczeniach przygotowanych (δq_k) była równa zeru.**

Równanie (4.26) jest spełnione dla dowolnego δq_k , jeśli siły uogólnione są równe zeru ($Q_k = 0$, ($k = 1, \dots, n$)).

Zasada prac przygotowanych jest najogólniejszą zasadą statyki analitycznej. Można z niej otrzymać warunki równowagi dowolnego układu mechanicznego.

Przykład 4.5.56. Wyprowadzić na podstawie równości (4.25) warunki równowagi swobodnego ciała sztywnego.

Oznaczając przez $\vec{\mathbf{F}}_i$ siły działające na ciało, możemy napisać dla położenia równowagi

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Przemieszczenie przygotowane dowolnego punktu ciała sztywnego może być wyznaczone następująco

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_o + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i ,$$

gdzie przez $\delta\vec{r}_o$ oznaczono przemieszczenie wybranego bieguna, a przez $\delta\vec{\varphi}$ wektor kąta małego przygotowanego obrotu.

Po podstawieniu do pierwszej zależności otrzymujemy

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot (\delta\vec{r}_o + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = 0 ,$$

skąd po przekształceniach

$$\delta L = \delta\vec{r}_o \cdot \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \delta\vec{\varphi} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) = 0 .$$

Przemieszczenia $\delta\vec{r}_o$ i $\delta\vec{\varphi}$ są od siebie niezależne, więc $\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ (wektor główny) i $\vec{M}_o = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ (moment główny względem bieguna O sił zewnętrznych działających na ciało sztywne) przyrównujemy do zera, czyli równowaga zachodzić będzie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \vec{M}_o = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} .$$

Powyższe równości stanowią konieczne i dostateczne warunki równowagi ciała sztywnego swobodnego przedstawione w formie wektorowej.

W analogiczny sposób można otrzymać warunki równowagi ciała sztywnego nieswobodnego. Załóżmy, że punkt O jest zamocowany. Wówczas $\delta\vec{r}_o = \vec{0}$ i równość wynikająca z zasady prac przygotowanych przyjmuje postać

$$\delta L = \delta\vec{\varphi} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) = 0 ,$$

wobec dowolności wektora $\delta\vec{\varphi}$ otrzymujemy poszukiwany warunek równowagi w postaci $\vec{M}_o = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$.

Jeżeli ciało może się jedynie obracać dookoła nieruchomej osi z (o wektorze $\vec{\mathbf{k}}$), to równość

$$\delta L = \delta \vec{\mathbf{r}}_o \cdot \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i + \delta \vec{\varphi} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i \right) = 0 .$$

Dla $\delta \vec{\mathbf{r}}_o = \vec{\mathbf{0}}$ (punkt O leży na nieruchomej osi) ma postać

$$\delta L = \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{M}}_o = \delta \varphi \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_o = \delta \varphi M_z = 0 ,$$

skąd wynika warunek równowagi

$$M_z = 0 ,$$

przy czym $M_z = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_o$ jest rzutem momentu sił zewnętrznych na oś z , czyli momentem sił względem osi z .

Przykład 4.5.57. Wyprowadzić warunki równowagi dowolnego nieswobodnego układu ciał sztywnych znajdujących się pod działaniem sił ciężkości.

Oznaczmy przez m_i masę i -tego ciała, a przez $\vec{\mathbf{g}}$ przyspieszenie ziemskie

$$\delta L = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{g}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0 .$$

Jeśli przyjąć, że z jest pionową osią (o zwrocie wektora $\vec{\mathbf{g}}$), to

$$\delta L = \sum_{i=1}^N m_i g \delta z_i = 0 .$$

Ostatnie równanie można przedstawić w postaci

$$\delta L = \delta \left(\sum_{i=1}^N m_i g z_i \right) = g \left(\delta \left(\sum_{i=1}^N m_i z_i \right) \right) = 0 .$$

Jeśli sumę mas wszystkich ciał układu oznaczymy przez M , a przez z_c pionową współrzędną środka ciężkości rozważanego układu (przy czym zakładamy, że pionowa oś z ma zwrot ku dołowi), wówczas, zgodnie z ostatnią równością, otrzymujemy

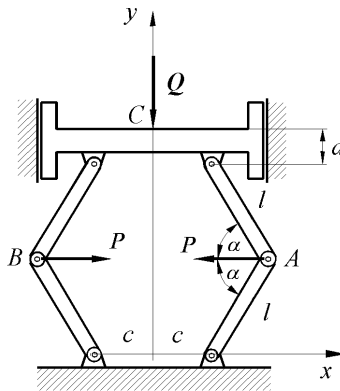
$$\delta L = g (\delta (M z_c)) = g M \delta z_c = 0 ,$$

a więc warunek równowagi układu – wobec $Mg \neq 0$ – ma postać

$$\delta z_c = 0.$$

Tak więc położeniami równowagi układu ciał ciężkich są te położenia, w których środek ciężkości zajmuje najniższe, najwyższe lub jakiegokolwiek inne "stacjonarne" położenie.

Przykład 4.5.58. Prasa, której schemat został pokazany na rys. 4.3 znajduje się w równowadze. Znaleźć związek między siłami P i Q w położeniu określonym kątem α . (Układ jest symetryczny względem osi y).



Rysunek 4.3: Model prasy

W stanie równowagi powinna być spełniona zależność wynikająca z zasady prac przygotowanych:

$$\delta L = -Q\delta y_C + P\delta x_B - P\delta x_A = 0.$$

Współrzędne y_C , x_B , x_A można wyznaczyć w zależności od kąta nachylenia prętów α :

$$y_C = 2l \sin \alpha + d, \quad x_B = -c - l \cos \alpha, \quad x_A = c + l \cos \alpha,$$

gdzie użyte zostały pomocnicze wielkości c , d , l (rys. 4.3). Rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody – jego położenie w sposób jednoznaczny określa kąt α .

Wynikające ze związków pomiędzy współrzędnymi przemieszczenia przygotowane wyznacza się na podstawie (4.13), z której dla $n = 1$ otrzymuje się:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Stąd:

$$\delta y_C = 2 l \cos \alpha \delta \alpha, \quad \delta x_B = l \sin \alpha \delta \alpha, \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha.$$

Podstawiając powyższe do wyrażenia na pracę przygotowaną, otrzymuje się

$$-Q 2 l \cos \alpha \delta \alpha - P(-l \sin \alpha) \delta \alpha + P l \sin \alpha \delta \alpha = 0,$$

a po przekształceniach

$$2 l (-Q \cos \alpha + P \sin \alpha) \delta \alpha = 0.$$

Spełnienie tego równania – przy dowolnym niezerowym uogólnionym przemieszczeniu przygotowanym $\delta \alpha$ – jest możliwe, jeśli

$$(-Q \cos \alpha + P \sin \alpha) = 0,$$

skąd

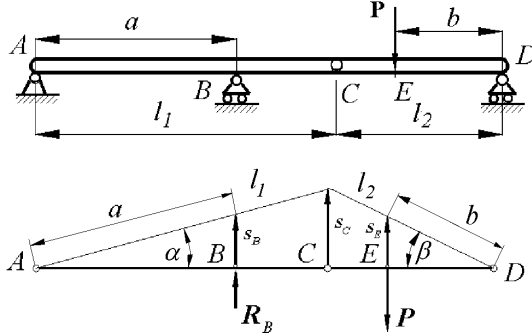
$$Q = P \operatorname{tg} \alpha.$$

Zatem w położeniu równowagi musi być spełniony warunek $Q = P \operatorname{tg} \alpha$.

Przykład 4.5.59. Belka dwuprzegubowa została podparta w dwóch punktach na podporach przesuwnych i w trzecim punkcie na podporze stałej (rys. 4.4). Wyznaczyć reakcję w podporze B.

Belka zamocowana w sposób pokazany na rys. 4.4a ma zero stopni swobody. Chcąc rozwiązać zadanie (wyznaczyć reakcję w punkcie B) na podstawie zasady prac przygotowanych, należy "zlikwidować" podporę w punkcie B i przyłożyć w tym miejscu odpowiednią siłę reakcji. Otrzymujemy w ten sposób mechanizm o jednym stopniu swobody, dla którego powinna być spełniona zasada prac przygotowanych

$$\delta L = R_B \delta s_B - P \delta s_E = 0.$$



Rysunek 4.4: Schemat układu i przemieszczenia przygotowane

Przemieszczenia punktów B i E:

$$s_B = a \sin \alpha, \quad s_E = b \sin \beta.$$

Przemieszczenia przygotowane δs_B i δs_E są zależne i możemy je najłatwiej wyznaczyć w zależności od kątów obrotu belek AC i CD:

$$\delta s_B = a \cos \alpha \delta \alpha, \quad \delta s_E = b \cos \beta \delta \beta$$

(lub w przybliżeniu – przyjmując $\cos \alpha \approx 1$, $\cos \beta \approx 1$ – jako: $\delta s_B = a \delta \alpha$, $\delta s_E = b \delta \beta$).

Kąty obrotu są ze sobą związane zależnością

$$l_1 \sin \alpha = l_2 \sin \beta,$$

z której otrzymuje się równanie

$$l_1 \cos \alpha \delta \alpha = l_2 \cos \beta \delta \beta,$$

(które – w przybliżeniu – może być zastąpione przez $l_1 \delta \alpha = l_2 \delta \beta$). Przyjmując, że $\delta \alpha$ jest niezależne, otrzymujemy

$$\delta s_E = \frac{l_1}{l_2} b \cos \alpha \delta \alpha$$

(lub w przybliżeniu $\delta s_E = \frac{l_1}{l_2} b \delta \alpha$). Po podstawieniu do zasady prac przygotowanych

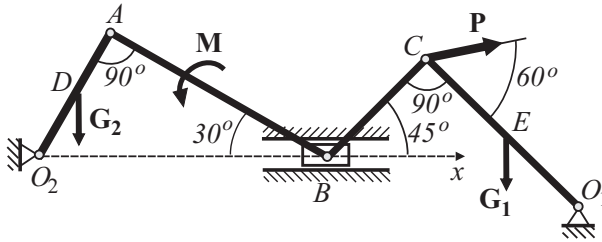
$$\delta L = R_B a \cos \alpha \delta \alpha - P \frac{l_1}{l_2} b \cos \alpha \delta \alpha = 0,$$

(albo $\delta L = R_B a \delta \alpha - P \frac{l_1}{l_2} b \delta \alpha = 0$), skąd ostatecznie otrzymujemy wartość reakcji w punkcie B

$$R_B = P \frac{l_1 b}{l_2 a}.$$

W rozpatrywanym przykładzie wynik rozwiązania dokładnego (dla dowolnie dużych wartości kątów α i β) jest identyczny z wynikiem otrzymanym przy założeniu, że $\cos \alpha \approx 1$, $\cos \beta \approx 1$.

Przykład 4.5.60. Na rysunku 4.5 jest przedstawiony model mechanizmu wraz z działającymi na niego obciążeniami. Położenie układu przedstawione na rysunku jest położeniem równowagi. Dla danych obciążeń i wymiarów: $G_1 = 50$ N, $G_2 = 40$ N, $M = 60$ Nm, $AB = 1$ m, wyznaczyć wartość siły P – używając do tego celu zasady prac przygotowanych dla współrzędnych uogólnionych.



Rysunek 4.5: Model mechanizmu – położenie równowagi

Równanie określające pracę przygotowaną sił czynnych ma postać

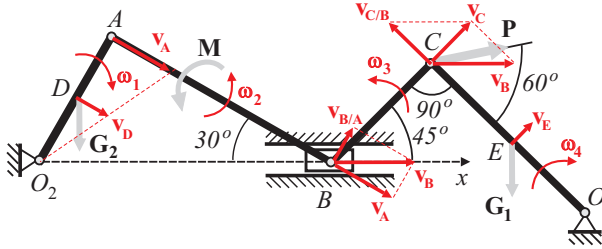
$$\delta L = \vec{G}_2 \cdot \delta \vec{r}_D + \vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi}_2 + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{G}_1 \cdot \delta \vec{r}_E = 0.$$

Pomocnicze oznaczenia użyte w rozwiązaniu są podane na rys. 4.6.

Wykorzystując zależności pomiędzy przemieszczeniami przygotowanymi a prędkościami możliwymi (przypadek więzów stacjonarnych):

$$\delta \vec{r}_D = d\vec{r}_D = \vec{v}_D dt, \quad \delta \vec{r}_C = d\vec{r}_C = \vec{v}_C dt,$$

$$\delta \vec{r}_E = d\vec{r}_E = \vec{v}_E dt, \quad \delta \vec{\varphi}_2 = d\vec{\varphi}_2 = \vec{\omega}_2 dt,$$



Rysunek 4.6: Model mechanizmu – prędkości punktów i prędkości kątowe ciał

równanie określające pracę przygotowaną sił czynnych można zapisać jako

$$\delta L = \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_D dt + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_2 dt + \vec{P} \cdot \vec{v}_C dt + \vec{G}_1 \cdot \vec{v}_E dt = 0 ,$$

gdzie \vec{v}_D , \vec{v}_C , \vec{v}_E są prędkościami liniowymi punktów, w których są przyłożone siły, natomiast $\vec{\omega}_2$ oznacza prędkość kątową ciała, na które działa para sił o momencie M (rys. 4.6). Po wyłączeniu czynnika dt poza nawias

$$\delta L = (\vec{G}_2 \cdot \vec{v}_D + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_2 + \vec{P} \cdot \vec{v}_C + \vec{G}_1 \cdot \vec{v}_E) dt = 0 ,$$

warunek równowagi można przedstawić w formie

$$\vec{G}_2 \cdot \vec{v}_D + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_2 + \vec{P} \cdot \vec{v}_C + \vec{G}_1 \cdot \vec{v}_E = 0$$

lub w postaci skalarnej jako

$$G_2 v_D \cos 60^\circ + M \omega_2 + P v_C \cos 30^\circ - G_1 v_E \cos 45^\circ = 0 .$$

Wartości prędkości poszczególnych punktów i prędkości kątowe ciał rozpatrywanego układu są opisane zależnościami, otrzymanymi na podstawie zależności pomiędzy wektorami prędkości, przedstawionymi na rys. 4.6 (użyte zostały oznaczenia: $l_1 = O_2A$, $l_2 = AB$):

$$v_A = \omega_1 l_1 , \quad v_B \cos 30^\circ = v_A , \quad v_{B/A} = \omega_2 l_2 , \quad \frac{v_{B/A}}{v_A} = \operatorname{tg} 30^\circ ,$$

$$v_C = v_B \cos 45^\circ , \quad v_E = \frac{1}{2} v_C ,$$

z których wynikają związki:

$$v_D = \omega_1 \frac{l_1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_1 l_1 \operatorname{tg} 30^\circ}{l_2} = \frac{\sqrt{3} \omega_1 l_1}{3 l_2},$$

oraz

$$v_C = \frac{\omega_1 l_1 \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{2} \omega_1 l_1}{\sqrt{3}}, \quad v_E = \frac{1}{2} v_C = \frac{\sqrt{2} \omega_1 l_1}{2 \sqrt{3}}.$$

Po podstawieniu zależności kinematycznych (4.27) do (4.27) otrzymuje się

$$\left(G_2 \frac{l_1}{2} \frac{1}{2} + M \frac{\sqrt{3} l_1}{3 l_2} + P \frac{\sqrt{2} l_1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} - G_1 \frac{\sqrt{2} l_1}{2 \sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \omega_1 = 0,$$

a następnie

$$G_2 \frac{l_1}{4} + M \frac{\sqrt{3} l_1}{3 l_2} + P \frac{\sqrt{2} l_1}{2} - G_1 \frac{\sqrt{3} l_1}{6} = 0.$$

Ostatecznie

$$P = \frac{\sqrt{6}}{6} G_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} G_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M}{l_2},$$

a po podstawieniu zadanych wartości

$$P = \frac{1}{12} \left(-120\sqrt{2} - 140\sqrt{6} \right) \text{ N} \cong -42,72 \text{ N}.$$

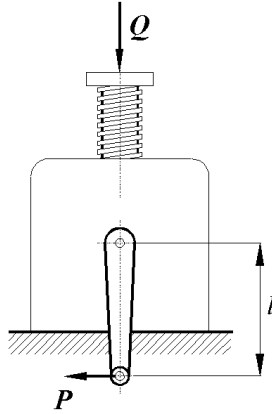
Przykład 45.61. Podnośnik śrubowy (rys. 47) jest w równowadze pod działaniem sił Q i P . Wyznaczyć związek między tymi siłami, jeśli wiadomo, że przy jednym obrocie korby trzpień podnośnika wysuwa się o h (Siła P jest stale prostopadła do korby).

Korzystając z zasady prac przygotowanych, można napisać zależność

$$\delta L = P \delta s_P - Q \delta s_Q = 0.$$

Jeśli jako współrzędną uogólnioną określającą położenie układu przyjmą kąt obrotu korby α , to wówczas

$$\delta s_P = l \delta \alpha,$$



Rysunek 4.7: Obciążenie podnośnika śrubowego

a wykorzystując związek między obrotem korby i przesuwem trzpienia (są do siebie proporcjonalne)

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{s_Q}{h},$$

otrzymuje się:

$$\delta\alpha = \frac{2\pi}{h}\delta s_Q, \quad \delta s_P = \frac{2\pi l}{h}\delta s_Q.$$

Przyjmując, że δs_Q jest niezależne – po podstawieniu $\delta\alpha$ i δs_P do zasady prac przygotowanych – będzie

$$\delta L = \left(P l \frac{2\pi}{h} - Q \right) \delta s_Q = 0,$$

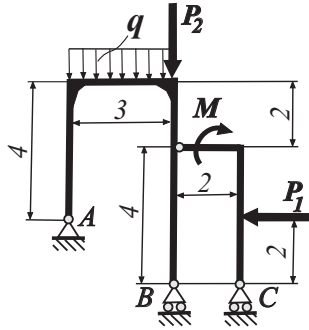
skąd wynika zależność

$$Q = P l \frac{2\pi}{h}.$$

W położeniu równowagi pomiędzy siłami P i Q zachodzi związek $Q = P l \frac{2\pi}{h}$.

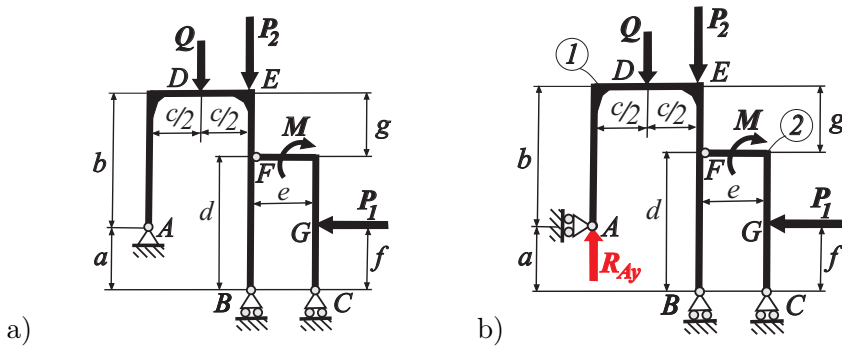
Przykład 4.5.62. Na rysunku 4.8 jest przedstawiony model konstrukcji wraz z działającymi na niego obciążeniami. Położenie układu przedstawione na rysunku jest położeniem równowagi. Dla danych obciążeń i wymiarów wyznaczyć poziomą składową reakcji podpory w punkcie

A, używając do tego celu zasady prac przygotowanych (Wielkości oznaczone na rysunku symbolami są zadane. Ciężar konstrukcji pominąć. Wymiary podane są w metrach).



Rysunek 4.8: Model konstrukcji – położenie równowagi

Oznaczenia użyte w rozwiązaniu są podane na rys. 4.9 ($a = 2$ m, $b = 4$ m, $c = 3$ m, $d = 4$ m, $e = 2$ m, $f = 2$ m, $g = 2$ m).



Rysunek 4.9: Model konstrukcji – oznaczenia użyte w rozwiązaniu

Podporę przegubową nieprzesuwną w punkcie A (rys. 4.9a) zastępujemy podporą, która ma możliwość przesuwania się w kierunku osi y i wprowadzamy poszukiwaną siłę reakcji R_{Ay} (rys. 4.9b).

Równanie określające pracę przygotowaną sił czynnych i poszukiwanej

$$\delta L = \vec{R}_{Ay} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_D + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_E + \vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi}_2 + \vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_G = 0 ,$$

gdzie φ_2 oznacza kąt obrotu ciała sztywnego oznaczonego na rys. 4.9b numerem 2.

Wykorzystując zależności pomiędzy przemieszczeniami przygotowanymi a możliwymi (przypadek więzów stacjonarnych):

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_A &= d\vec{r}_A = \vec{v}_A dt, & \delta \vec{r}_D &= d\vec{r}_D = \vec{v}_D dt, & \delta \vec{r}_E &= d\vec{r}_E = \vec{v}_E dt, \\ \delta \vec{\varphi}_2 &= d\vec{\varphi}_2 = \vec{\omega}_2 dt, & \delta \vec{r}_G &= d\vec{r}_G = \vec{v}_G dt, \end{aligned}$$

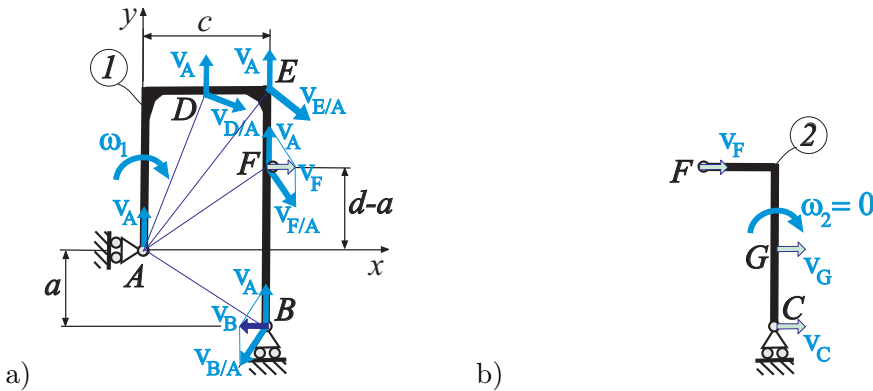
otrzymuje się

$$\delta L = \left(\vec{R}_{Ay} \cdot \vec{v}_A + \vec{Q} \cdot \vec{v}_D + \vec{P}_2 \cdot \vec{v}_E + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_2 + \vec{P}_1 \cdot \vec{v}_G \right) dt = 0 ,$$

zatem warunek równowagi można przedstawić jako

$$\vec{R}_{Ay} \cdot \vec{v}_A + \vec{Q} \cdot \vec{v}_D + \vec{P}_2 \cdot \vec{v}_E + \vec{M}_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \vec{P}_1 \cdot \vec{v}_G = 0 .$$

Składowe prędkości punktów B, F, E, D należących do ciała 1 są przedstawione na rys. 4.10a (a prędkości punktów C, G, F ciała 2 na rys. 4.10b).



Rysunek 4.10: Składowe prędkości punktów B, F, E, D

Wyznaczając prędkość punktu B jako

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{AB} , \\ \text{gdzie : } \vec{r}_{AB} &= \vec{i}c - \vec{j}a, \quad \vec{\omega}_1 = -\vec{k}\omega_1 \end{aligned}$$

i wiedząc, że wektor prędkości punktu B musi mieć kierunek poziomy (w punkcie B znajduje się podpora przesuwana, która dopuszcza ruch jedynie w kierunku poziomym), stwierdzamy że rzuty \vec{v}_B na osie x i y są równe

$$v_{By} = v_A - \omega_1 c = 0 \quad \text{oraz} \quad v_{Bx} = 0 - \omega_1 a .$$

Stąd

$$\omega_1 = \frac{v_A}{c} .$$

Podobnie, dla punktu F ($\vec{v}_F = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{AF}$, gdzie $\vec{r}_{AF} = \vec{i}c + \vec{j}(d-a)$) otrzymuje się

$$v_{Fy} = v_A - \omega_1 c = v_A - \frac{v_A}{c} c = 0$$

$$\text{oraz} \quad v_{Fx} = \omega_1 (d-a) = \frac{v_A}{c} (d-a) ,$$

co oznacza, że $v_F = v_{Fx} = \frac{v_A}{c} (d-a)$, a więc prędkość punktu F ma kierunek poziomy.

Rozpatrując ruch ciała 2 (rys. 4.10b) i wiedząc, że prędkość punktu F ma kierunek poziomy oraz że prędkość punktu C może mieć tylko poziomy kierunek (podpora przesuwana), stwierdzamy, że ruch tego ciała jest ruchem postępowym, a zatem $\omega_2 = 0$ oraz $v_G = v_F = \frac{v_A}{c} (d-a)$.

Biorąc pod uwagę otrzymane zależności pomiędzy prędkościami, równanie (4.27) można zapisać w formie

$$R_{Ay} v_A - Q(v_A - \omega_1 \frac{c}{2}) - P_2(v_A - \omega_1 c) - P_1 v_G = 0 .$$

Podstawiając $\omega_1 = \frac{v_A}{c}$ i $v_G = \frac{v_A}{c} (d-a)$, otrzymuje się

$$\left(R_{Ay} - \frac{1}{2}Q - P_2 \cdot 0 + M_2 \cdot 0 - P_1 \frac{d-a}{c} \right) v_A = 0 ,$$

skąd

$$R_{Ay} = \frac{1}{2}Q + P_1 \frac{d-a}{c} = \frac{1}{2}Q + \frac{2}{3}P_1 .$$

4.6 Równowaga w zachowawczym polu sił

Korzystając z zależności (4.17), to jest

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.27)$$

siły uogólnione Q_k można przedstawić jako

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.28)$$

Jeśli układ materialny znajduje się w zachowawczym polu sił, to składowe siły \mathbf{F}_i przyłożonej do punktu A_i o współrzędnych kartezjańskich x_i, y_i, z_i , można wyrazić poprzez energię potencjalną jako:

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}. \quad (4.29)$$

W przypadku gdy położenie układu jest określone za pomocą współrzędnych uogólnionych q_1, \dots, q_n , to po podstawieniu (4.29) do (4.28) otrzymuje się

$$Q_k = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.30)$$

Wyrażenie (4.30) można przedstawić jako

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.31)$$

Korzystając z faktu, że w położeniu równowagi wszystkie siły uogólnione muszą być równe zero, otrzymuje się warunki równowagi – dla układu o więzach idealnych i obciążonego wyłącznie siłami potencjalnymi, o potencjale V – w formie:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.32)$$

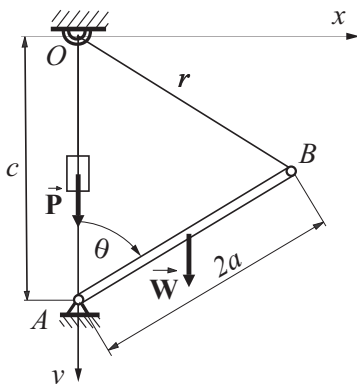
lub

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0. \quad (4.33)$$

Równania (4.33) można traktować jako warunki konieczne dla występowania ekstremum funkcji $V(q_1, \dots, q_n)$, która oznacza energię potencjalną układu.

- W położeniu równowagi układu materialnego poddanego więzom idealnym i znajdującego się w zachowawczym (potencjalnym) polu sił, energia potencjalna V tego układu spełnia warunki konieczne do istnienia ekstremum.

Przykład 4.6.63. Dla układu pokazanego na rysunku 4.11, obciążonego siłami ciężkości P i W , wyznaczyć położenia równowagi. Dane są siły P i W , wymiary c i a oraz długość liny l .



Rysunek 4.11: Pręt podparty przegubowo, utrzymywany w położeniu równowagi przez linę z zawieszonym obciążnikiem o ciężarze P

Wszystkie siły działające na układ są potencjalne, dlatego najłatwiej będzie wyznaczyć energię potencjalną układu, a następnie siły uogólnione. Energię obliczamy w układzie, którego początek znajduje się w punkcie O (rys. 4.11) i oś y jest zwrócona do dołu

$$V = -P y_P - W y_W .$$

Znaki w wyrażeniu na energię potencjalną muszą być tak dobrane, by spełnione były warunki $-\frac{\partial V}{\partial y_P} = P$, $-\frac{\partial V}{\partial y_W} = W$. Inaczej rzecz ujmując można stwierdzić, że energia potencjalna siły jest równa pracy wykonanej przez tę

siłę przy przesunięciu punktu jej przyłożenia do poziomu odniesienia (dla siły P będzie to $V = -P y_P$).

Mechanizm ma jeden stopień swobody; za współrzędną uogólnioną przyjmujemy kąt θ . Oznaczając długość liny przez l i korzystając z twierdzenia cosinusów, otrzymuje się:

$$y_P = l - r = l - \sqrt{(2a)^2 + c^2 - 2 \cdot 2a c \cos \theta},$$

$$y_W = c - a \cos \theta,$$

zatem energia potencjalna jest określona wyrażeniem¹:

$$V = -P \left(l - \sqrt{(2a)^2 + c^2 - 4a c \cos \theta} \right) - W (c - a \cos \theta).$$

Siła uogólniona odpowiadająca współrzędnej θ ma postać

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -P \frac{2a c \sin \theta}{\sqrt{(2a)^2 + c^2 - 4a c \cos \theta}} + W a \sin \theta.$$

W położeniu równowagi siła uogólniona musi być równa zero, stąd

$$\left(-P \frac{2a c}{\sqrt{(2a)^2 + c^2 - 4a c \cos \theta}} + W a \right) \sin \theta = 0.$$

Z ostatniego równania wynika, że mechanizm (bez względu na obciążenia) może być w równowadze w położeniu określonym kątem $\theta = 0$ i $\theta = \pi$. Inne położenia możemy wyznaczyć rozwiązując równanie

$$-P \frac{2c}{\sqrt{(2a)^2 + c^2 - 4a c \cos \theta}} + W = 0.$$

Zatem

$$\cos \theta = \frac{4a^2 + c^2}{4ac} - \frac{P^2 c}{W^2 a}.$$

Położeniami równowagi dla analizowanego układu są położenia określone kątami $\theta = 0$, $\theta = \pi$ oraz $\theta = \arccos \left(\frac{4a^2 + c^2}{4ac} - \frac{P^2 c}{W^2 a} \right)$.

¹Przebieg zmian energii potencjalnej rozpatrywanego układu jest przedstawiony na s. 218 (rys. C.2).

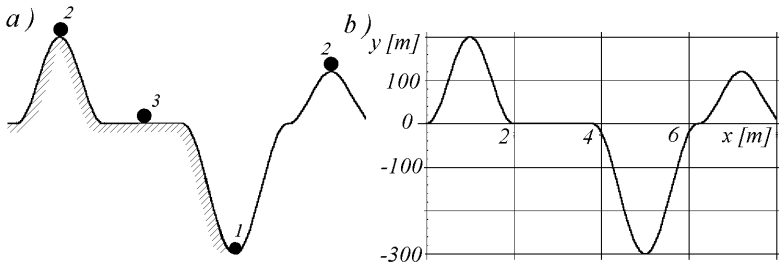
4.6.1 Rodzaje równowagi

Równowagą stałą nazywamy taki rodzaj równowagi, przy którym po nieskończenie małym wychyleniu układu z położenia lokalnej równowagi układ wraca do położenia wyjściowego bądź wykonuje wahania wokół tego położenia.

Równowagą chwiejną nazywamy taki rodzaj równowagi, przy którym nieskończenie małe wychylenie układu z lokalnego położenia równowagi powoduje ruch układu bądź przejście do innego położenia albo wahania wokół nowego położenia równowagi.

Równowagą obojętną nazywamy taki rodzaj równowagi, przy którym nieskończenie małe wychylenie układu z położenia równowagi powoduje przejście układu do innego położenia równowagi.

W teorii stateczności położenie charakteryzujące się równowagą stałą jest nazywane *statecznym położeniem równowagi*. *Niestatecznym położeniem równowagi* określa się położenie, w którym równowaga układu jest chwiejna lub obojętna.



Rysunek 4.12: Punkt materialny umieszczony na krzywej – położenia równowagi: stałej (1), chwiejnej (2), obojętnej (3)

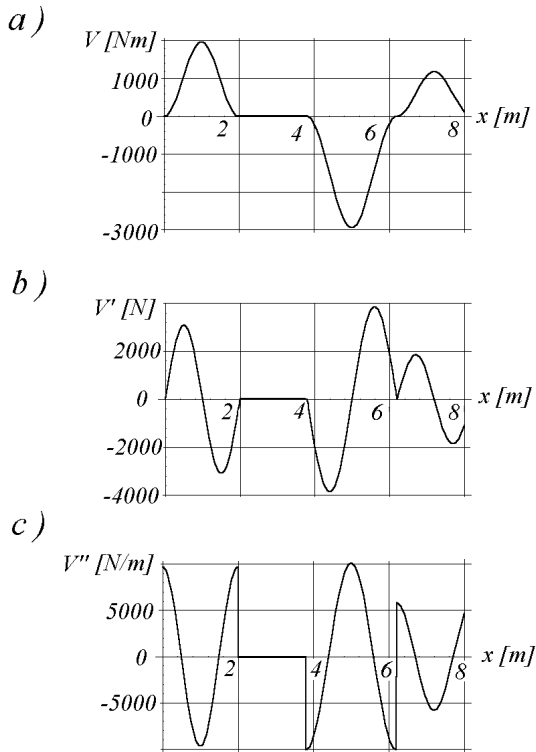
Można wykazać prawdziwość poniższej zasady, noszącej nazwę *zasady Dirichleta*.

- Dla układu materialnego poddanego działaniu zachowawczego pola sił, położenie, w którym energia potencjalna osiąga minimum jest położeniem równowagi stałej.

Warunki konieczne i wystarczające istnienia lokalnego minimum energii potencjalnej V dla układu o jednym stopniu swobody ($V = V(q_1)$) oznaczają, że w położeniu równowagi – dla $q_1 = q_{10}$:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_{(q_1=q_{10})} \equiv \left(\frac{dV}{dq_1}\right)_{(q_1=q_{10})} = 0, \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{(q_1=q_{10})} \equiv \left(\frac{d^2 V}{dq_1^2}\right)_{(q_1=q_{10})} > 0. \quad (4.35)$$



Rysunek 4.13: Energia potencjalna V punktu (o masie $m = 1$ kg) pozostającego na krzywej pokazanej na rys. 4.12b (a) oraz jej pochodne $V' = \frac{dV}{dx}$ (b) i $V'' = \frac{d^2 V}{dx^2}$ (c)

Funkcja dwóch zmiennych, $V = V(q_1, q_2)$, ma w punkcie $V_0 = V(q_{10}, q_{20})$ minimum lokalne, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu (q_{10}, q_{20}) , że dla

wszystkich punktów (q_1, q_2) należących do tego otoczenia spełniony jest warunek $V(q_1, q_2) \geq V(q_{10}, q_{20})$.

Warunki konieczne i wystarczające istnienia lokalnego minimum energii (rys. 4.14a) dla układu o dwóch stopniach swobody ($V = V(q_1, q_2)$) mają postać:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_{(q_{10}, q_{20})} = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)_{(q_{10}, q_{20})} = 0, \quad (4.36)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{(q_{10}, q_{20})} > 0, \quad (4.37)$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2\right)_{(q_{10}, q_{20})} > 0. \quad (4.38)$$

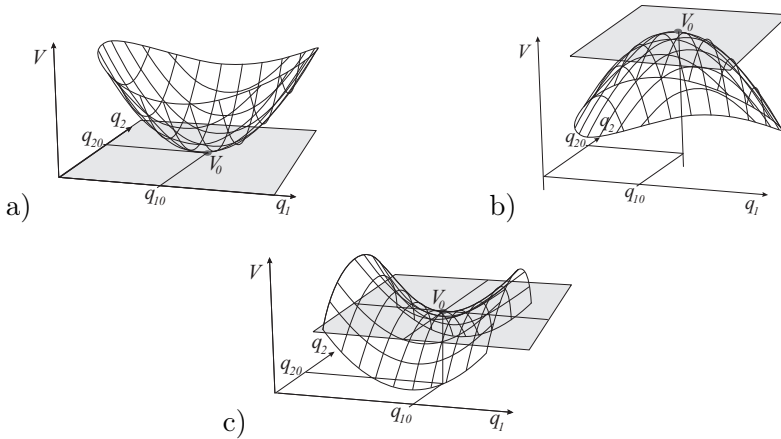
Jeśli $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{(q_{10}, q_{20})} < 0$ (dla $\Delta > 0$), to funkcja ma lokalne maksimum (rys. 4.14b). W przypadku, gdy $\Delta < 0$, to w punkcie (q_{10}, q_{20}) nie ma ani minimum, ani maksimum, a punkt jest nazywany punktem siodłowym (rys. 4.14c).

Dla układu o n – stopniach swobody ($V = V(q_1, \dots, q_n)$) warunkiem istnienia minimum, w punkcie $(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})$ jest, aby macierz drugich pochodnych energii potencjalnej była dodatnio określona. Zachodzi to wtedy, gdy wszystkie podwyznaczniki główne i wyznacznik całej macierzy zawierającej drugie pochodne – dla punktu $(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})$ – są dodatnie²:

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right|_{(q_{10})} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{vmatrix}_{(q_{10}, q_{20})} > 0, \quad (4.39)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_3 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_3 \partial q_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_3^2} \end{vmatrix}_{(q_{10}, q_{20}, q_{30})} > 0, \quad (4.40)$$

²Wartunki te zostały sformułowane przez J.J. Sylwestera (1814–1897).



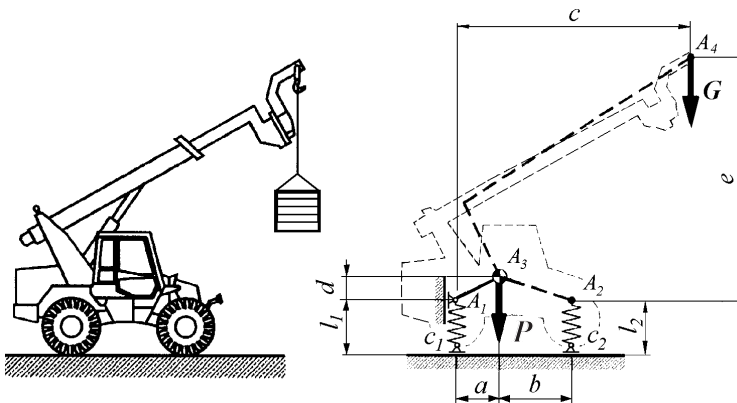
Rysunek 4.14: Przykłady minimum (a), maximum (b) oraz punktu siodłowego (c) energii potencjalnej dla funkcji dwóch zmiennych

$$\begin{matrix}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \left| \begin{array}{cccccc}
 \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{n-1}} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_n} \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{n-1}} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial q_{n-1} \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_{n-1} \partial q_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_{n-1}^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_{n-1} \partial q_n} \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_{n-1}} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2}
 \end{array} \right|_{(q_{10}, \dots, q_{n0})} & & & & & & > 0 . \quad (4.41)
 \end{matrix}$$

Szczególnym przypadkiem zasady Dirichleta jest twierdzenie *Toricellego*.

- Położeniem równowagi stałej nieswobodnego układu materialnego o więzach idealnych znajdującego się pod działaniem sił ciężkości jest takie położenie, w którym środek ciężkości znajduje się w najniższym z możliwych położeniach.

Przykład 4.6.64. Określić położenie równowagi płaskiego modelu żurawia, podpartego sprężysto w punktach A_1 i A_2 , w sposób pokazany na rys. 4.15. Zadane obciążenia: ciężar ładunku (G) i ciężar własny maszyny (P) są przyłożone odpowiednio w punktach A_3 i A_4 . Sztywności sprężyn wynoszą c_1 i c_2 , a ich długości w stanie nieodkształconym są sobie równe ($l_1 = l_2$). Zbadać stateczność położenia równowagi.



Rysunek 4.15: Żuraw samojezdny i jego model fizyczny – zagadnienie statyki

Ponieważ na układ działają wyłącznie obciążenia potencjalne, to siły uogólnione (i równania równowagi) mogą być wyznaczone na podstawie energii potencjalnej V .

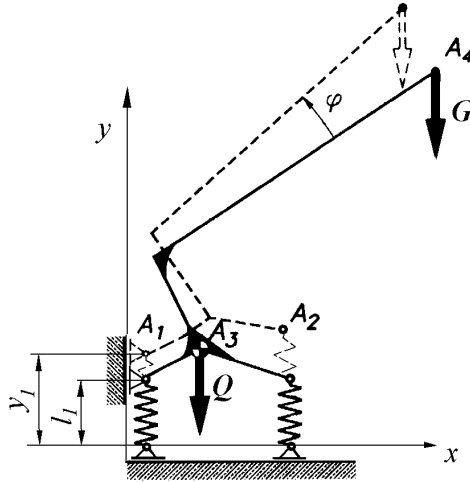
Jeśli przyjąć, że sprężyna o sztywności c_2 po odkształceniu odchyła się nieznacznie od pionu, to energię potencjalną można określić zależnością

$$V = Py_3 + Gy_4 + \frac{1}{2}c_1(y_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(y_2 - l_2)^2,$$

w której y_1, \dots, y_4 oznaczają współrzędne położenia punktów A_1, \dots, A_4 .

Jako współrzędne uogólnione określające położenie układu zostały przyjęte: położenie punktu A_1 (y_1) i kąt obrotu żurawia (φ) (rys. 4.16). Pozostałe współrzędne występujące w wyrażeniu na energię potencjalną V można przedstawić poprzez współrzędne uogólnione jako:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + (a + b) \sin \varphi, \\ y_3 &= y_1 + a \sin \varphi + d \cos \varphi, \\ y_4 &= y_1 + c \sin \varphi + e \cos \varphi. \end{aligned}$$

Rysunek 4.16: Współrzędne uogólnione (y_1, φ) dla modelu żurawia

Po podstawieniu otrzymuje się energię określoną poprzez współrzędne uogólnione (y_1, φ) w formie

$$V = P(y_1 + a \sin \varphi + d \cos \varphi) + G(y_1 + c \sin \varphi + e \cos \varphi) + \frac{1}{2}c_1(y_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(y_1 + (a + b) \sin \varphi - l_2)^2.$$

Z warunków równowagi $Q_y = \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0$ i $Q_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ wynikają równania równowagi o postaci:

$$Q_y = P + G + c_1(y_1 - l_1) + c_2(y_1 + (a + b) \sin \varphi - l_2) = 0,$$

$$Q_\varphi = P a_d + G c_e + c_2(y_1 + (a + b) \sin \varphi - l_2)(a + b) \cos \varphi = 0,$$

w których użyto podstawień $a_d = a \cos \varphi - d \sin \varphi$ oraz $c_e = c \cos \varphi - e \sin \varphi$.

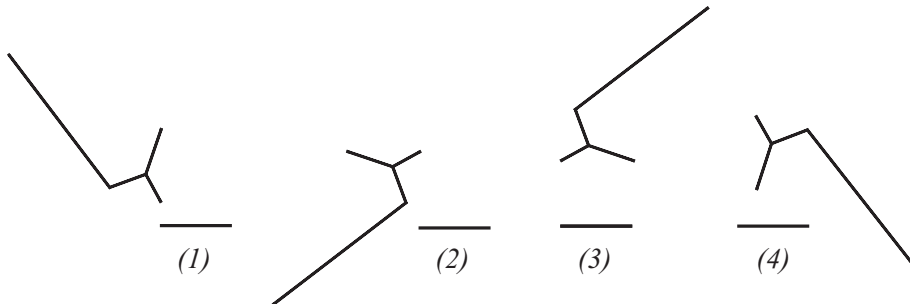
Dla zadanych wartości obciążeń: $P = 15 \text{ kN}$, $G = 5 \text{ kN}$, wymiarów: $a = 0,9 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $l_1 = l_2 = 1,2 \text{ m}$, $c = 4,85 \text{ m}$, $d = 0,5 \text{ m}$, $e = 5,1 \text{ m}$, sztywności podpór: $c_1 = 1000 \text{ kN/m}$, $c_2 = 2000 \text{ kN/m}$, zostały wyznaczone (numerycznie) współrzędne punktów y_1, φ , dla których pochodne energii potencjalnej są równe zero oraz wartości Δ w tych punktach – określone wzorem (4.38) – rozstrzygające o stateczności położenia równowagi.

Wyniki są zamieszczone w tablicy 4.1 (wartości pierwszych pochodnych są podane z dokładnością do 10^{-8}).

Tablica 4.1: Wyniki badania stateczności żurawia

	y_{10}	φ_0	$\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_{y_1=y_{10}}$	$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0}$	Δ (4.38)
1	-0,4066	1,562	0	0	$-1,1536 \times 10^{13}$
2	1,1957	-3,1401	0	0	$1,1619 \times 10^{13}$
3	1,1957	-0,0015	0	0	$1,1421 \times 10^{13}$
4	2,7933	-1,5622	0	0	$-1,1502 \times 10^{13}$

Położenia żurawia, odpowiadające otrzymanym wynikom, są przedstawione na rys. 4.17.

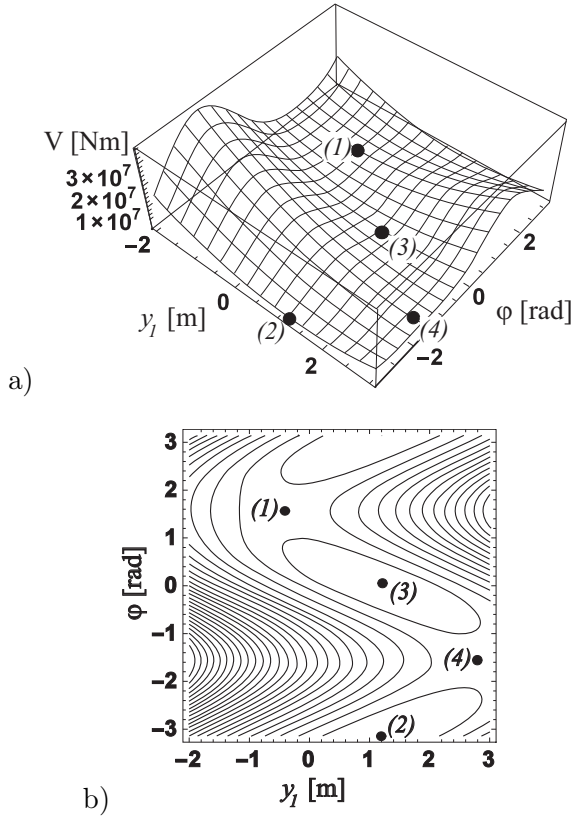


Rysunek 4.17: Wyniki rozwiązania dla modelu żurawia – wyznaczone położenia równowagi

Wykreślenie (przy użyciu komputera) przebiegu zmian energii potencjalnej V badanego modelu – w funkcji współrzędnych uogólnionych y_1 i φ (rys. 4.18) – pozwala na wizualną ocenę stateczności położenia równowagi.

Pośród wyznaczonych numerycznie rozwiązań są takie, które nie mają – z technicznego punktu widzenia – sensu, jak np. (1), (2) i (4). Ponadto położenia (1), (2), (4) nie spełniają przyjętego założenia o małym kącie odchylenia od pionu sprężyny o sztywności c_2 .

W rozpatrywanym przypadku położenia (2) i (3) są stateczne (energia potencjalna osiąga w tych położeniach lokalne minimum), a punkty (1) i (4) są punktami siodłowymi ($\Delta < 0$).



Rysunek 4.18: Energia potencjalna V : przebieg zmian (a) i warstwie (b) oraz położenia równowagi statecznej (2), (3) i niestatecznej – punkty siodłowe (1), (4)

Pominięcie jednego z przyjętych założeń – uwzględnienie dowolnego kąta odchylenia sprężyny o sztywności c_2 od pionu – wiąże się ze zmianą zależności określającej energię potencjalną układu na następującą:

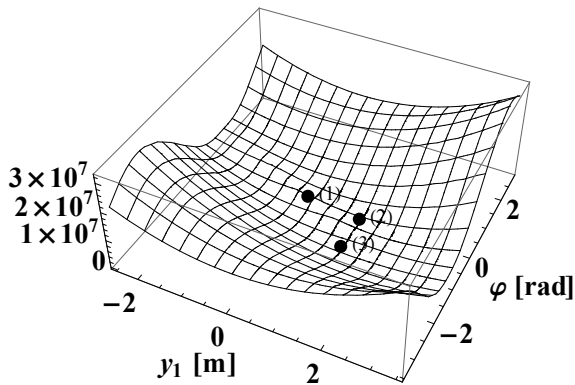
$$V = Py_3 + Gy_4 + \frac{1}{2}c_1(y_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}c_2 \left(\sqrt{(a + b - x_2)^2 + y_2^2} - l_2 \right)^2,$$

gdzie

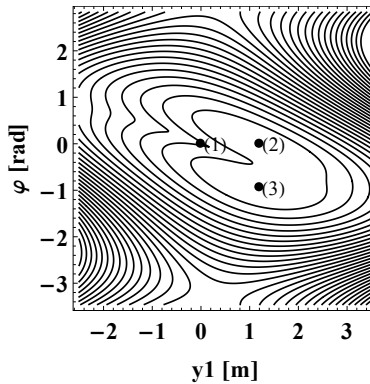
$$x_2 = (a + b) \cos \varphi ,$$

(zamiast $x_2 = (a + b)$, jak przyjęto w pierwszym przybliżeniu).

Wyniki rozwiązania dla tak określonej energii potencjalnej – w postaci przebiegu zmian energii potencjalnej, rysunku jej warstwic oraz punktów oznaczających położenia równowagi – są przedstawione na rys. 4.19.



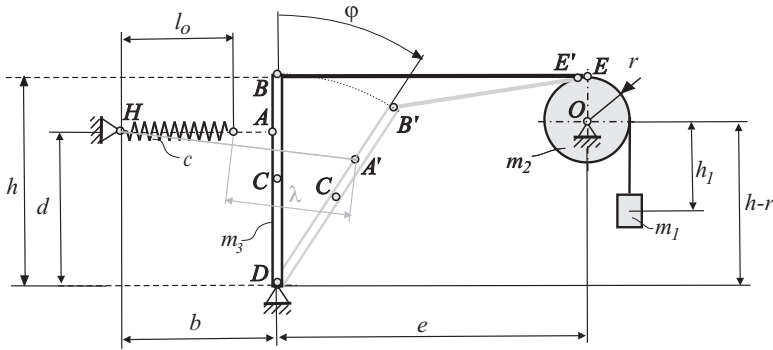
a)



b)

Rysunek 4.19: Energia potencjalna V : przebieg zmian (a) i warstwic (b) oraz położenia równowagi statecznej (2), (3) i niestatecznej – punkt siodłowy (1)

Przykład 46.65. Określić stateczne (φ_s) i niestateczne (φ_n) położenia równowagi układu przedstawionego na rys. 4.20. Wielkości zadane to wymiary: b, d, e, h, h_1, r , masy: m_1, m_2, m_3 , współczynnik sztywności sprężyny c i długość nieodkształconej sprężyny l_o . Położenie układu przedstawione na rys. 4.20 czarnymi liniami nie jest położeniem równowagi (Sprężyna łączy się z prętem w punkcie A).



Rysunek 4.20: Model układu w położeniu, w którym pominięto wpływ siły ciężkości m_1g i siły sprężystości $c\lambda$

Siły zewnętrzne działające na rozpatrywany układ (siły ciężkości i sprężystości) są siłami potencjalnymi.

Energia potencjalna układu w położeniu wychylonym (określonym współrzędną y , kątem wychylenia φ oraz wydłużeniem sprężyny λ – rys. 4.21) jest równa

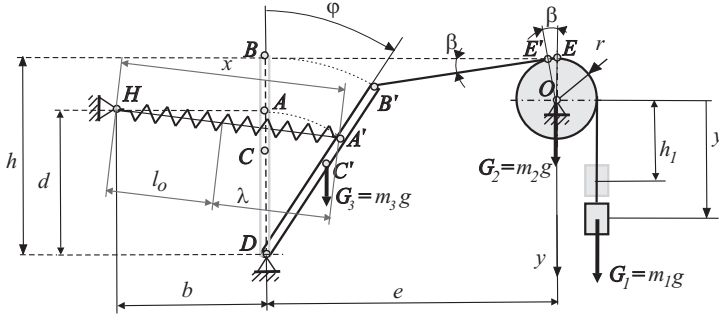
$$V = -m_1g(y - h_1) - m_3g\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\cos(\varphi)\right) + \frac{1}{2}c\lambda^2.$$

Układ ma jeden stopień swobody. Jako współrzędną uogólnioną przyjęto kąt φ . Konieczne jest więc określenie zależności $\lambda = \lambda(\varphi)$ oraz $y = y(\varphi)$.

Odkształcenie sprężyny λ określa różnica jej długości w położeniu równowagi ($x = HA'$) i w stanie nienapiętym (l_o), to jest $\lambda = x - l_o$.

Długość sprężyny odkształconej można określić z trójkąta HAA' (rys. 4.22), w którym $HA = b$, $AA' = 2d\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, a użycie twierdzenia cosinusów prowadzi do zależności

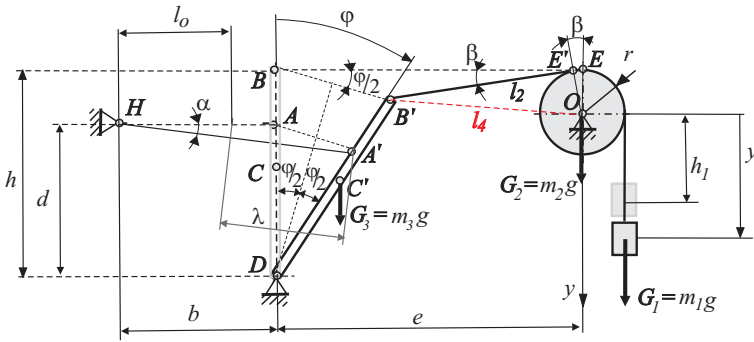
$$x^2 = b^2 + \left(2d\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 + 4bd\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$



Rysunek 4.21: Model analizowanego układu w położeniu równowagi

stąd

$$\lambda = \sqrt{b^2 + 2bd \sin(\varphi) - 2d^2 \cos(\varphi) + 2d^2} - l_0 .$$



Rysunek 4.22: Model układu w położeniu równowagi – oznaczenia pomocnicze

Pomocnicze równania konieczne do określenia $y = y(\varphi)$, to:

– zależności geometryczne umożliwiające określenie kąta wychylenia β w zależności od kąta φ :

$$l_4 = \sqrt{(e - h \sin(\varphi))^2 + (h \cos(\varphi) - h + r)^2} , \quad l_2 = \sqrt{l_4^2 - r^2} ,$$

$$l_2 \sin(\beta) + r - r \cos(\beta) = h - h \cos(\varphi) , \quad (4.42)$$

– zależność określająca długość liny (a tym samym położenie y ciała o masie m_1)

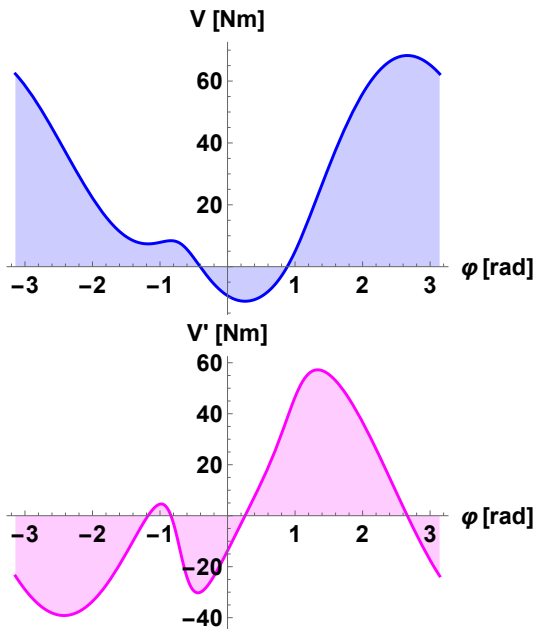
$$e + \frac{1}{2}\pi r + h_1 = l_2 + \beta r + \frac{1}{2}\pi r + y .$$

Energia potencjalna określona za pomocą kąta φ ma postać

$$V = -m_1 g \left(r \arctan(f_1(\varphi)) - d - \sqrt{(e - h \sin \varphi)^2 + (h \cos \varphi - h + r)^2 - r^2} + e + h_1 \right) + \frac{1}{2} c \left(\sqrt{b^2 + 2bd \sin \varphi - 2d^2 \cos \varphi + 2d^2} - l_o \right)^2 - m_3 g h \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) ,$$

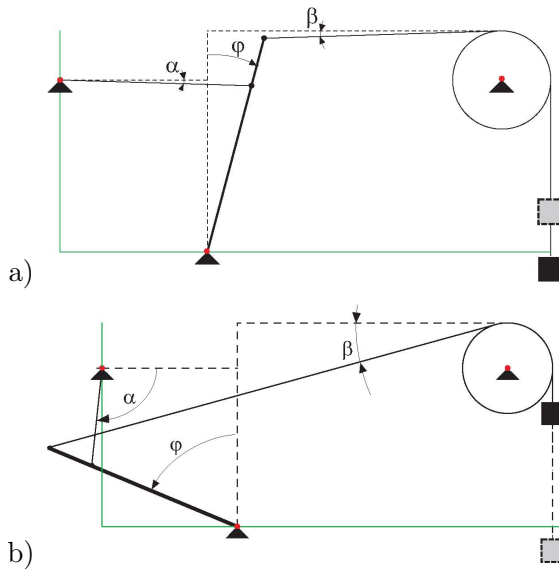
przy czym $f_1(\varphi)$ jest funkcją na tyle skomplikowaną, że zamieszczenie jej nie jest możliwe (zajmuje zbyt dużo miejsca).

Przebiegi zmian energii potencjalnej (wyznaczonej dla danych: $e = 0,6$ m, $b = 0,3$ m, $d = 0,35$ m, $h = 0,45$ m, $r = 0,1$ m, $c = 500$ N/m, $l_o = 0,25$ m, $h_1 = 0,2$ m, $G_1 = 50$ N, $G_3 = 40$ N, $g = 9,81$ m/s²) oraz jej pochodnej są przedstawione na rys. 4.23.



Rysunek 4.23: Przebiegi zmian energii potencjalnej i jej pochodnej

Energia potencjalna osiąga lokalne minimum dla kątów $\varphi_s = 0,2597$ rad ($\varphi_s = 14,88^\circ$) oraz dla $\varphi_s = -1,1769$ rad ($\varphi_s = -67,43^\circ$). Kąty te określają położenia równowagi stałej (lokalne stateczne położenia równowagi). Dla kąta $\varphi_n = -0,837$ rad ($\varphi_n = -47,96^\circ$) energia potencjalna osiąga lokalne maksimum, a więc takie położenie jest niestatecznym położeniem równowagi.



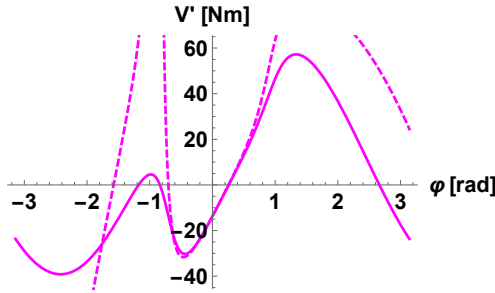
Rysunek 4.24: Wyniki rozwiązania – stateczne położenia równowagi modelu dla $\varphi_s = 0,2597$ rad oraz dla $\varphi_s = -1,1769$ rad (jednakowa skala dla wymiarów modelu i przemieszczeń)

Wyniki numerycznego rozwiązania (rys. 4.24) równań opisujących dokładny model układu wskazują, że kąty β i α są małe dla $\varphi_s = 14,88^\circ$, ale dla drugiego statecznego położenia równowagi ($\varphi_s = -67,43^\circ$) osiągają duże wartości. Rozwiązania przybliżone, w których zakłada się, że kąty β i α są małe nie będą wiarygodne przy dużych kątach tych wychyleń.

Przybliżona wielkość pochodnej energii potencjalnej

Jeśli energia potencjalna będzie określona w sposób dokładny, a jej pochodna w sposób przybliżony (przy założeniu $\sin \varphi \rightarrow \varphi$, $\cos \varphi \rightarrow 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, $\sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2}(\frac{\varphi}{2})^2$), to przebieg pochodnej energii potencjalnej będzie dosyć znacząco różnić się od jej dokładnego przebiegu (rys. 4.25). Wyznacze-

nie położenia równowagi poprzez określenie miejsc zerowych pochodnej energii potencjalnej będzie w tym przypadku obarczone znacznym błędem.



Rysunek 4.25: Przebieg zmian pochodnej energii potencjalnej określonej w sposób dokładny (linia ciągła) i przybliżony (dla $\sin \varphi \rightarrow \varphi$, $\cos \varphi \rightarrow 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, $\sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2}(\frac{\varphi}{2})^2$)

Rozwiązanie – metoda pierwsza

Przy założeniu, że kąty wychylenia φ , α oraz β są małe ($\cos \alpha \rightarrow 1$, $\sin \alpha \rightarrow \alpha$, $\sin \varphi \rightarrow \varphi$, $\cos \varphi \rightarrow 1$, $\sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow 1$, $\cos \beta \rightarrow 1$, $\sin \beta \rightarrow \beta$, $\tan \beta \rightarrow \beta$) otrzymuje się

$$x^2 = b^2 + \left(2d\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 4bd\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad x = \sqrt{(b + \varphi d)^2}, \quad \lambda = \sqrt{(b + \varphi d)^2} - l_o,$$

a pomocnicze równania sprowadzają się do prostych zależności:

$$l_4 = \sqrt{(e - h\varphi)^2 + r^2}, \quad l_2 = \sqrt{(e - h\varphi)^2},$$

$$l_2 \beta = 0, \quad e = h\varphi + l_2 + r\beta, \quad \text{labelLag} - 22u,$$

zatem $\beta = 0$ lub – na podstawie ostatniego z tych równań – $\beta = (e - h\varphi - \sqrt{(e - h\varphi)^2})/r$. Ponadto współrzędna y położenia ciała

$$y = e + h_1 - l_2 = e + h_1 - \sqrt{(e - h\varphi)^2}.$$

Energia potencjalna – w przypadku założenia $\beta = 0$ – jest określona jako

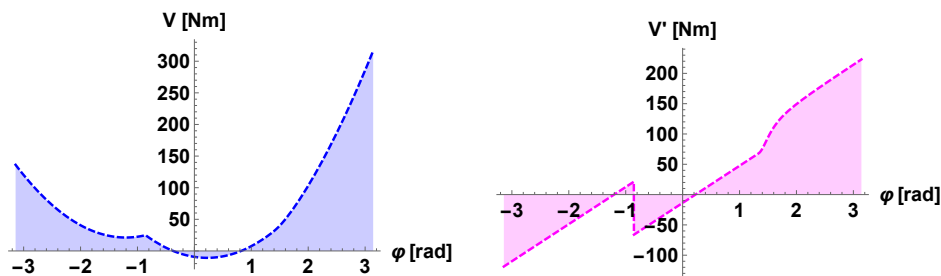
$$V = -m_1 g \left(e + h_1 - \sqrt{(e - h\varphi)^2} \right) + \frac{1}{2} c \left(\sqrt{(b + d\varphi)^2} - l_o \right)^2,$$

a dla $\beta = (e - h\varphi - \sqrt{(e - h\varphi)^2})/r$ ma formę

$$V = -m_1g(h\varphi + h_1) + \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(b + d\varphi)^2 - l_o} \right)^2 .$$

Należy tu zwrócić uwagę, że przyjęte przybliżenie powoduje, iż energia potencjalna układu jest niezależna od masy pręta m_3 , zatem jej wpływ na położenie równowagi jest w takiej wersji rozwiązania pomijany.

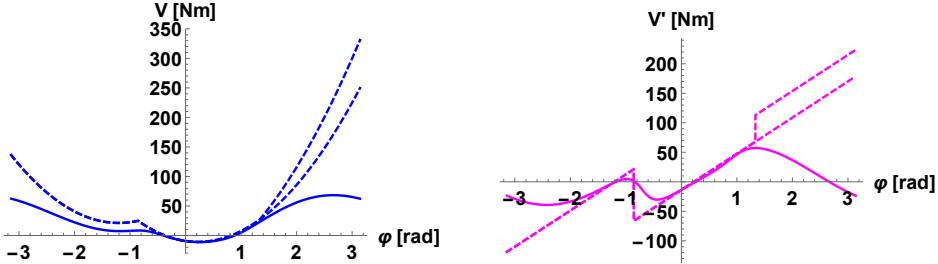
Przebieg zmian energii potencjalnej i jej pochodnej (dla danych: $e = 0,6$ m, $b = 0,3$ m, $d = 0,35$ m, $h = 0,45$ m, $r = 0,1$ m, $c = 500$ N/m, $l_o = 0,25$ m, $h_1 = 0,2$ m, $G_1 = 50$ N, $G_3 = 40$ N, $g = 9,81$ m/s²) jest przedstawiony na rys. 4.26.



Rysunek 4.26: Przebiegi zmian energii potencjalnej i jej pochodnej określone w sposób przybliżony

Energia potencjalna – określona w sposób przybliżony – osiąga lokalne minimum dla kątów $\varphi_s = 0,2626$ rad ($\varphi_s = 15,05^\circ$) oraz dla $\varphi_s = -1,3473$ rad ($\varphi_s = -77,20^\circ$). Kąty te określają w sposób przybliżony położenia lokalne równowagi stałej. Dla kąta $\varphi_n = -0,855$ rad ($\varphi_n = -48,99^\circ$) energia potencjalna osiąga lokalne maksimum, zatem to położenie jest niestacycznym położeniem równowagi.

Na rysunku 4.27 porównane są przebiegi zmian pochodnej wyznaczone w sposób dokładny i przybliżony (w dwóch wariantach, dla $\beta = 0$ oraz $\beta \neq 0$).



Rysunek 4.27: Przebiegi zmian energii potencjalnej i jej pochodnej określone w sposób dokładny (linie ciągłe) i przybliżony (linie przerywane) – dla $\beta \neq 0$ i $\beta = 0$

Rozwiązanie – metoda druga

Uwzględnienie wpływu masy pręta m_3 na położenie równowagi dla rozwiązania przybliżonego jest możliwe, jeśli przyjąć, że kąty wychylenia φ , α oraz β są małe ($\cos \alpha \rightarrow 1$, $\sin \alpha \rightarrow \alpha$, $\sin \varphi \rightarrow \varphi$, $\sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\varphi}{2}$, $\cos \beta \rightarrow 1$, $\sin \beta \rightarrow \beta$, $\tan \beta \rightarrow \beta$), ale funkcje $\cos \varphi$ i $\cos \frac{\varphi}{2}$ zostaną przedstawione – po rozwinięciu w szereg potęgowy – jako $\cos \varphi \rightarrow 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ oraz $\cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow 1 - \frac{(\frac{\varphi}{2})^2}{2} = 1 - \frac{\varphi^2}{8}$. Wówczas:

$$x = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}bd\varphi(\varphi^2 - 8) + d^2\varphi^2},$$

$$l_4 = \sqrt{(e - h\varphi)^2 + \frac{1}{4}(h\varphi^2 - 2r)^2},$$

$$l_2 = \sqrt{e^2 - 2eh\varphi + \frac{1}{4}h\varphi^2(h(\varphi^2 + 4) - 4r)},$$

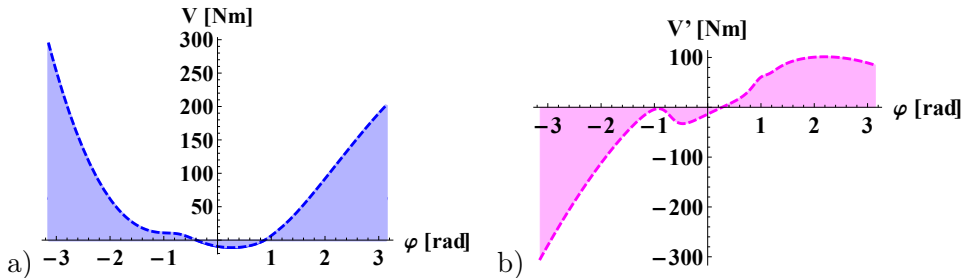
$$\beta = \frac{-\sqrt{4e^2 - 8eh\varphi + h^2\varphi^4 + 4h^2\varphi^2 - 4hr\varphi^2} + 2e - 2h\varphi}{2r},$$

$$y = -\sqrt{e^2 - 2eh\varphi + \frac{1}{4}h\varphi^2(h(\varphi^2 + 4) - 4r)} + e + h_1 - \beta r.$$

Energia potencjalna jest, w tym przypadku, określona jako

$$V = -m_1g \left(-\sqrt{e^2 - 2eh\varphi + \frac{1}{4}h\varphi^2(h(\varphi^2 + 4) - 4r)} + e + h_1 - \beta r \right) + \\ -\frac{1}{4}m_3gh\varphi^2 + \frac{1}{2}c \left(l_0 - \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}bd\varphi(\varphi^2 - 8) + d^2\varphi^2} \right)^2.$$

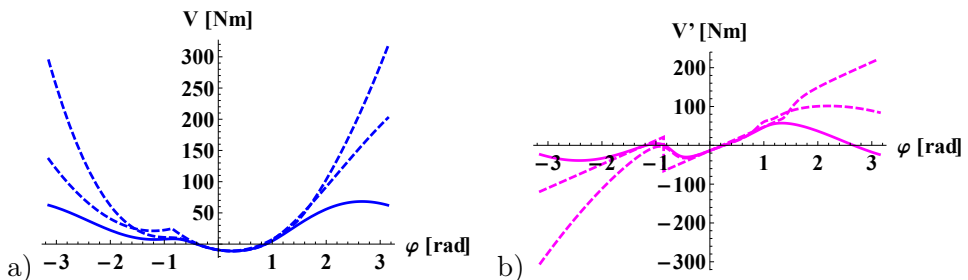
Przebieg zmian energii potencjalnej i jej pochodnej (dla danych: $e = 0,6$ m, $b = 0,3$ m, $d = 0,35$ m, $h = 0,45$ m, $r = 0,1$ m, $c = 500$ N/m, $l_o = 0,25$ m, $h_1 = 0,2$ m, $G_1 = 50$ N, $G_3 = 40$ N, $g = 9,81$ m/s²) jest przedstawiony na rys. 4.28.



Rysunek 4.28: Przebiegi zmian energii potencjalnej (a) i jej pochodnej (b) określone w sposób przybliżony

Energia potencjalna – określona w sposób przybliżony – osiąga lokalne minimum dla kątów $\varphi_s = 0,2697$ rad ($\varphi_s = 15,46^\circ$) oraz dla $\varphi_s = -0,9221$ rad ($\varphi_s = -52,83^\circ$). Kąty te określają w sposób przybliżony położenia równowagi stałej.

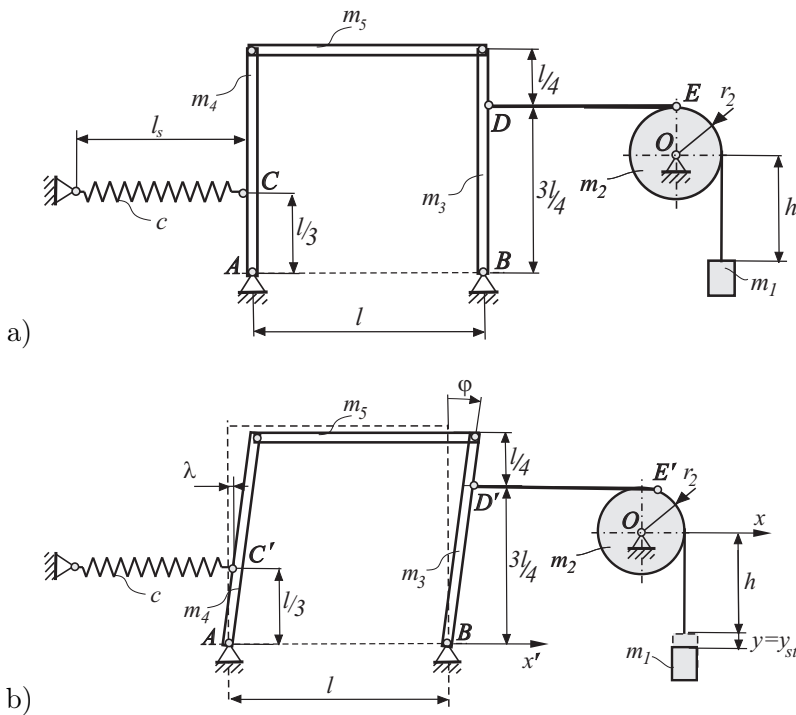
Na rysunku 4.29 porównane są przebiegi zmian pochodnej wyznaczone w sposób dokładny i przybliżony (dla dwóch przybliżeń).



Rysunek 4.29: Przebiegi zmian energii potencjalnej (a) i jej pochodnej (b) określone w sposób dokładny (linie ciągłe) i przybliżony (linie przerywane)

Przykład 4.6.66. Wyznaczyć położenie równowagi (y_{st}) ciała o masie m_1 dla układu przedstawionego na rys. 4.30a, przy założeniu, że kąty wychylenia są małe. Wielkości zadane są oznaczone na rysunku odpowiednimi symbolami.

Położenie układu przedstawione na rys. 4.30a nie jest położeniem równowagi.



Rysunek 4.30: Model układu: a) w położeniu odniesienia, b) w położeniu równowagi

Siły działające na rozpatrywany układ są siłami potencjalnymi. Energia potencjalna układu w położeniu wychylonym (określonym współrzędną y , kątem wychylenia φ i wydłużeniem sprężyny λ – rys. 4.30b) jest równa

$$V = -m_1 g(h + y) + m_3 g \frac{l}{2} \cos \varphi + m_4 g \frac{l}{2} \cos \varphi + m_5 g l \cos \varphi + \frac{1}{2} c \lambda^2$$

(przy czym energia potencjalna sił ciężkości została określona względem

wybranych poziomów odniesienia – dla ciała o masie m_1 wyznaczonego przez oś x , a dla prętów o masach m_3, m_4, m_5 przez oś x' – rys. 4.30b).

Kąt φ oraz wydłużenie sprężyny λ są zależne od przemieszczenia y (układ ma jeden stopień swobody), a przy założeniu, że kąty wychYLENIA SĄ MAŁE można przyjąć:

$$y \cong \varphi \frac{3l}{4}, \quad \lambda \cong \varphi \frac{l}{3}, \quad \text{zatem} \quad \varphi \cong \frac{4}{3l}y, \quad \lambda \cong \frac{4}{3l}y \frac{l}{3} = \frac{4}{9}y.$$

Po podstawieniu tak określonych wielkości otrzymuje się

$$V \cong -m_1g(h + y) + m_3g \frac{l}{2} \cos\left(\frac{4}{3l}y\right) + m_4g \frac{l}{2} \cos\left(\frac{4}{3l}y\right) + m_5gl \cos\left(\frac{4}{3l}y\right) + \frac{1}{2}c\left(\frac{4}{9}y\right)^2.$$

Pochodna energii potencjalnej względem współrzędnej y jest równa

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -m_1g - m_3g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \sin\left(\frac{4}{3l}y\right) - m_4g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \sin\left(\frac{4}{3l}y\right) - m_5gl \frac{4}{3l} \sin\left(\frac{4}{3l}y\right) + c \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}y\right).$$

Przyjmując, że dla małych kątów φ można przyjąć $\sin \varphi \cong \varphi$ (w tym przypadku $\sin\left(\frac{4}{3l}y\right) \cong \left(\frac{4}{3l}y\right)$), otrzymuje się

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -m_1g - m_3g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \left(\frac{4}{3l}y\right) - m_4g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \left(\frac{4}{3l}y\right) - m_5gl \frac{4}{3l} \left(\frac{4}{3l}y\right) + c \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}y\right).$$

Położenie równowagi $y = y_{st}$ układu (o więzach idealnych i obciążeniach potencjalnych) określamy na podstawie warunku istnienia ekstremum energii potencjalnej

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=y_{st}} = 0,$$

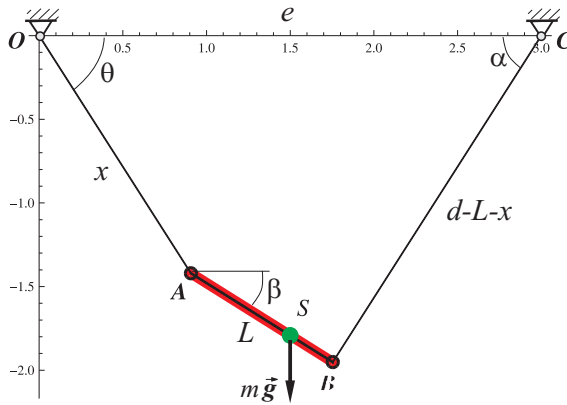
skąd

$$-m_1g - \frac{8}{9l}m_3gy_{st} - \frac{8}{9l}m_4gy_{st} - \frac{16}{9l}m_5gy_{st} + \frac{16}{81}cy_{st} = 0.$$

Ostatecznie

$$y_{st} = \frac{m_1g}{-\frac{8}{9l}m_3g - \frac{8}{9l}m_4g - \frac{16}{9l}m_5g + \frac{16}{81}c}.$$

Przykład 4.6.67. Gładką rurkę o długości L nawleczono na nierozciągliwą nić o długości d . Końce nici umocowano na jednym poziomie w odległości e (rys. 4.31). Wiedząc, że środek ciężkości rurki znajduje się w odległości λ od jej końca ($AS = \lambda$), wyznaczyć położenie równowagi układu i zbadać stateczność tego położenia.



Rysunek 4.31: Model układu (rurka nawleczona na nić) w położeniu równowagi

Tablica 4.2: Oznaczenia i wartości parametrów układu użyte w obliczeniach

	Nazwa	Oznaczenie	Wartosc	Jedn.
1	Przyspieszenie ziemskie	g	9,81	m/s^2
2	Masa rurki	m	1	kg
3	Długość nici $OABC$	d	5	m
4	Odcinek nici OA	x	x	m
5	Odcinek nici $AB = L$	L	1	m
6	Odcinek nici BC	$d - L - x$	$4 - x$	m
7	Odległość między końcami nici $OC = e$	e	3	m
8	Położenie środka ciężkości pręta $AS = \lambda$	λ	0,7	m

Siły działające na rozpatrywany układ są siłami potencjalnymi. Całkowita energia potencjalna jest określona funkcją zależną od położenia poszczególnych elementów układu

$$V = -mg(x \sin(\Theta) + \lambda \sin(\beta)).$$

Współrzędne określające funkcję V muszą dodatkowo spełniać równania więzów geometrycznych nałożonych na układ:

$$f_1 = x \cos(\Theta) + L \cos(\beta) + (d - L - x) \cos(\alpha) - e = 0,$$

$$f_2 = x \sin(\Theta) + L \sin(\beta) - (d - L - x) \sin(\alpha) = 0$$

W podanych zależnościach występują cztery współrzędne $(x, \Theta, \beta, \alpha)$, ale tylko dwie z nich są niezależne ($N_{wsp} = 4, k = 2, n = N_{wsp} - k = 2$, a więc układ ma dwa stopnie swobody). Stosunkowo łatwo jest wyeliminować z równań więzów kąt α . Wyznaczając z jednego równania $\sin(\alpha)$, a z drugiego $\cos(\alpha)$, otrzymuje się:

$$\cos(\alpha) = \frac{e - L \cos(\beta) - x \cos(\Theta)}{d - L - x} \quad \text{oraz} \quad \sin(\alpha) = \frac{L \sin(\beta) + x \sin(\Theta)}{d - L - x},$$

a ponieważ $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, równania więzów zostaną sprowadzone do jednego równania (oznaczonego symbolem f_{12}) zawierającego trzy współrzędne (Θ, β, x)

$$f_{12} = \frac{-d^2 + 2dL + 2dx + e^2 - 2eL \cos(\beta) - 2ex \cos(\Theta) + 2Lx \cos(\beta - \Theta) - 2Lx}{(-d + L + x)^2} = 0.$$

Energia potencjalna jest funkcją trzech współrzędnych $V = V(\Theta, \beta, x)$, z których dwie są niezależne. W związku z tym należałoby wyznaczyć (z równania więzów) jedną ze współrzędnych. Możliwe jest też inne podejście umożliwiające określenie sił uogólnionych (Q_Θ, Q_β, Q_x) przy wykorzystaniu mnożników Lagrange'a:

$$Q_\Theta = \frac{\partial V}{\partial \Theta} - \mu \frac{\partial f_{12}}{\partial \Theta} = -mgx \cos(\Theta) - \frac{\mu(2ex \sin(\Theta) + 2Lx \sin(\beta - \Theta))}{(-d + L + x)^2},$$

$$Q_\beta = \frac{\partial V}{\partial \beta} - \mu \frac{\partial f_{12}}{\partial \beta} = -mg\lambda \cos(\beta) - \frac{\mu(2eL \sin(\beta) - 2Lx \sin(\beta - \Theta))}{(-d + L + x)^2},$$

$$Q_x = \frac{\partial V}{\partial x} - \mu \frac{\partial f_{12}}{\partial x} = -mg \sin(\Theta) - \mu \left(\frac{2d - 2e \cos(\Theta) + 2L \cos(\beta - \Theta) - 2L}{(-d + L + x)^2} + \frac{2(-d^2 + 2dL + 2dx + e^2 - 2eL \cos(\beta) - 2ex \cos(\Theta) + 2Lx \cos(\beta - \Theta) - 2Lx)}{(-d + L + x)^3} \right).$$

Aby określić położenie równowagi układu należy przyrównać siły uogólnione do zera:

$$Q_{\Theta} = -gm x \cos(\Theta) - \frac{\mu(2ex \sin(\Theta) + 2Lx \sin(\beta - \Theta))}{(-d + L + x)^2} = 0,$$

$$Q_{\beta} = -gm \lambda \cos(\beta) - \frac{\mu(2eL \sin(\beta) - 2Lx \sin(\beta - \Theta))}{(-d + L + x)^2} = 0,$$

$$Q_x = -gm \sin(\Theta) - \mu \left(\frac{2d - 2e \cos(\Theta) + 2L \cos(\beta - \Theta) - 2L}{(-d + L + x)^2} + \frac{2(-d^2 + 2dL + 2dx + e^2 - 2eL \cos(\beta) - 2ex \cos(\Theta) + 2Lx \cos(\beta - \Theta) - 2Lx)}{(-d + L + x)^3} \right) = 0$$

oraz wykorzystać równanie więzów $f_{12} = 0$

$$f_{12} = \frac{-d^2 + 2dL + 2dx + e^2 - 2eL \cos(\beta) - 2ex \cos(\Theta) + 2Lx \cos(\beta - \Theta) - 2Lx}{(-d + L + x)^2} = 0.$$

Po rozwiązaniu układu czterech równań otrzymujemy wyniki zestawione w tabeli i przedstawione na rysunkach.

Tablica 4.3: Wartości parametrów układu otrzymane z obliczeń

	Nazwa	Oznaczenie	Wartość	Jedn.
1	Długość nici OABC	d	5	m
2	Odcinek nici OA	x	1,68505	m
3	Odcinek nici AB=L	L	1	m
4	Odcinek nici BC	$d - L - x$	2,31495	m
5	Odległość między końcami nici	e	3	m
6	Położenie środka ciężkości rurki	λ	0,7	m
7	Kąt nici BCO (α)	α	1,23902	rad
8	Kąt nici BCO (α)	α	70,9908	°
9	Kąt nici COA (Θ)	Θ	1,00256	rad
10	Kąt nici COA (Θ)	Θ	57,4427	°
11	Kąt rurki AB od poziomu β	β	0,559671	rad
12	Kąt rurki AB od poziomu β	β	32,0668	°
13	Mnożnik Lagrange'a μ	μ	-6,86639	Nm
14	Energia potencjalna V	V	-17,9189	Nm

W dalszym ciągu rozwiązania określony jest rodzaj położenia równowagi. W tym celu z wyrażenia opisującego energię potencjalną eliminuje się zmienną β zawartą w funkcji $\sin\beta$, pozostawiając tylko zmienne niezależne Θ i x . Należy zatem z równania $f_{12} = 0$ wyznaczyć $\sin\beta$.

Po przekształceniach trygonometrycznych otrzymujemy równanie drugiego stopnia, z którego (dla $\beta > 0$)

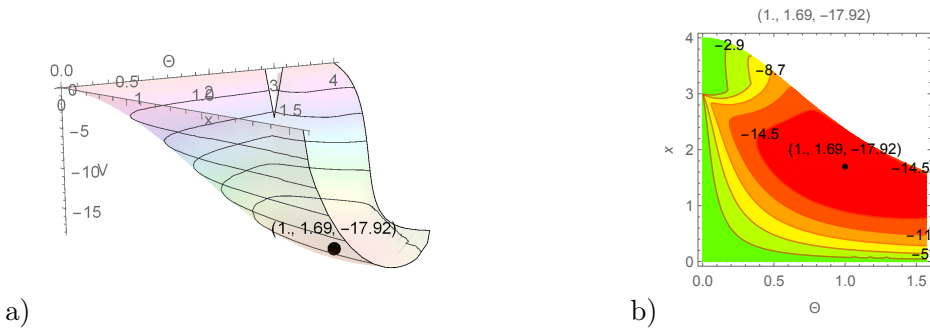
$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{L^2(e - c\Theta x)^2 (e(e - 2c\Theta x) - d^2 + 2dx) (2x(c\Theta e - d + 2L) + (d - 2L)^2 - e^2)}}{2L^2 (-2c\Theta ex + e^2 + x^2)} + \frac{L s\Theta x (-2x(c\Theta e + L) - d^2 + 2d(L + x) + e^2)}{2L^2 (-2c\Theta ex + e^2 + x^2)},$$

gdzie przez $s\Theta$ oznaczono $\sin(\Theta)$, a przez $c\Theta$ oznaczono $\cos(\Theta)$.

Energia potencjalna może być więc wyrażona jako funkcja dwu zmiennych (x oraz Θ)

$$V(\Theta, x) = -mgx s\Theta - mg\lambda \frac{L s\Theta x (-2x(c\Theta e + L) - d^2 + 2d(L + x) + e^2)}{2L^2 (-2c\Theta ex + e^2 + x^2)} - mg\lambda \frac{\sqrt{L^2(e - c\Theta x)^2 (e(e - 2c\Theta x) - d^2 + 2dx) (2x(c\Theta e - d + 2L) + (d - 2L)^2 - e^2)}}{2L^2 (-2c\Theta ex + e^2 + x^2)}.$$

Wykres $V(\Theta, x)$ i linie określające stały poziom energii potencjalnej zostały pokazane na rys. 4.32.



Rysunek 4.32: Energia potencjalna układu: a) powierzchnia $V(\Theta, x)$, b) warstwie $V(\Theta, x) = const_i$

Dla rozpatrywanego układu o dwóch stopniach swobody ($V = V(\Theta, x)$) warunkiem istnienia minimum jest, aby macierz drugich pochodnych energii potencjalnej była dodatnio określona

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \Theta \partial \Theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \Theta \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \Theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x} \end{vmatrix} > 0 .$$

Zachodzi to wtedy, gdy wszystkie podwyznaczniki główne i wyznacznik całej macierzy zawierającej drugie pochodne są dodatnie:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} > 0 , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \Theta \partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \Theta} > 0 .$$

Po podstawieniu wartości współrzędnych, przy których układ jest w równowadze, otrzymuje się:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} \right)_{\Theta=1, x=1,68} = 2,25 > 0 , \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{\Theta=1, x=1,68} = 30,05 > 0 ,$$

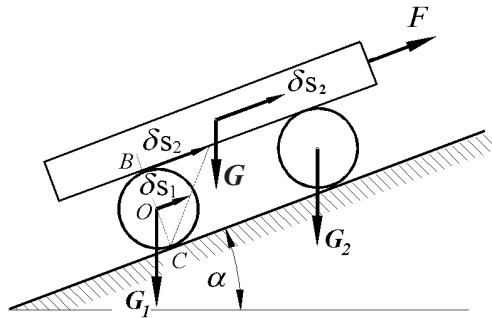
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta \partial x} \right)_{\Theta=1, x=1,68} = -0,09 , \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \Theta} \right)_{\Theta=1, x=1,68} = -0,09 ,$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} \right)_{\Theta=1, x=1,68} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{\Theta=1, x=1,68} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta \partial x} \right)_{\Theta=1, x=1,68} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \Theta} \right)_{\Theta=1, x=1,68} = \\ & = 2,25 \cdot 30,05 - (-0,09) \cdot (-0,09) = 67,60 > 0 . \end{aligned}$$

Ostatnie wyniki obliczeń potwierdzają to, co widać na wykresach funkcji V (rys. 4.32), iż w położeniu równowagi układ jest stateczny.

4.6.2 Zadania do rozwiązania – zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych; stateczność położenia równowagi

Zadanie 68. Określić wielkość siły F koniecznej do utrzymania układu – pokazanego na rys. 4.33 – w położeniu równowagi. Dane są ciężary krążków G_1 i G_2 oraz płyty G i kąt nachylenia α . W rozpatrywanym przypadku poślizg nie zachodzi (*Odpowiedź:* $F = \left[G + \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \right] \sin \alpha$).



Rysunek 4.33: Rysunek do zadania 68

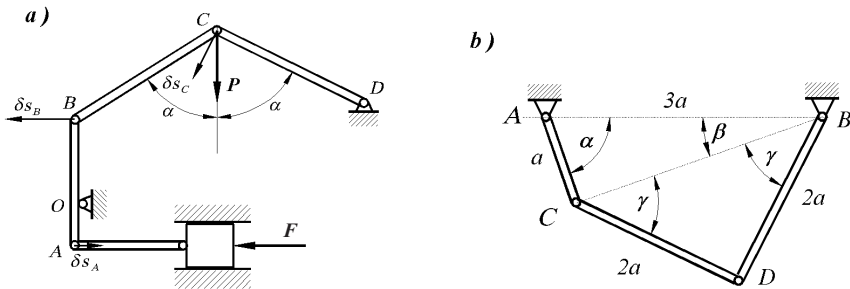
Zadanie 69. Tłok połączony z układem lekkich prętów obciążono poziomą siłą F (rys. 4.34a). Określić wielkość pionowej siły P koniecznej do utrzymania układu w położeniu równowagi. Ciężar prętów jest pomijalnie mały w porównaniu z zadaną siłą F (W rozwiązaniu przyjąć $OB = 2OA$).

(*Odpowiedź:* $P = \frac{F}{\tan \alpha}$).

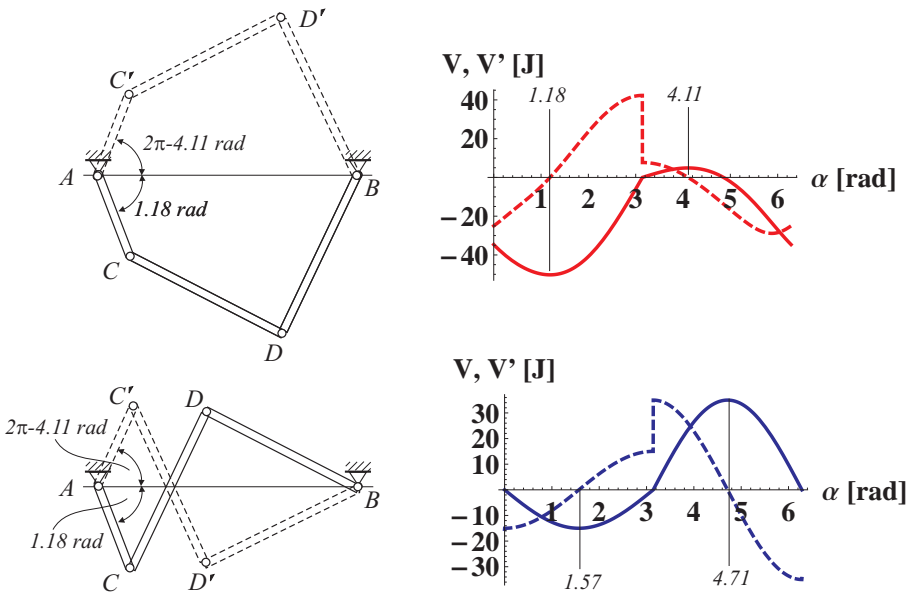
Zadanie 70. Określić kąt α w położeniu równowagi czworoboku przegubowego utworzonego z trzech prętów (rys. 4.34b). Ciężar prętów jest proporcjonalny do ich długości (*Odpowiedź:* należy rozwiązać równanie

$$\frac{(15 - 50 \cos \alpha + 15 \cos 2\alpha)}{4(5 - 3 \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{31\sqrt{3} \sin \alpha - 4 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \sin 2\alpha + 3^{\frac{3}{2}} \sin 3\alpha}{4(5 - 3 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}(1 + \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

z którego otrzymujemy: $\alpha_1 = 1, 18 \text{ rad}$ i $\alpha_2 = 4, 12 \text{ rad}$).

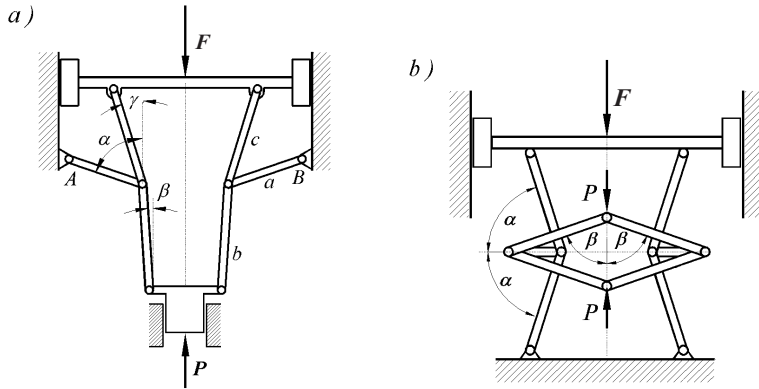


Rysunek 4.34: Rysunki do zadań 69 i 70



Rysunek 4.35: Stateczne i niestateczne położenia równowagi oraz energia potencjalna V – linie ciągłe i jej pochodna $V' = \frac{\partial V}{\partial \alpha}$ – linie przerywane (ilustracja do rozwiązania zadania 70)

Zadanie 71. Wyznaczyć wielkość siły F koniecznej do utrzymania układu – pokazanego na rys. 4.36a – w położeniu równowagi określonym kątami α , β i γ . Ciężar prętów jest pomijalnie mały w porównaniu z zadaną siłą P .



Rysunek 4.36: Rysunek do zadania 71 i 72

(Odpowiedź: $F = P \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha}$).

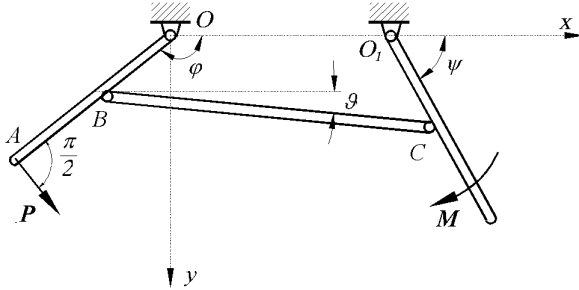
Zadanie 72. Dla prasy (pokazanej na rys. 4.36b) wyznaczyć wielkość siły F koniecznej do utrzymania układu w położeniu równowagi określonym kątami α i β . Ciężar prętów jest pomijalnie mały w porównaniu z zadanymi siłami (Odpowiedź: $F = P \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$).

Zadanie 73. Układ trzech prętów połączonych przegubami (pokazany na rys. 4.37) znajduje się w położeniu równowagi określonym kątami ϕ i ψ . Wyznaczyć wartość M momentu pary sił utrzymującej układ w równowadze. Ciężar prętów jest pomijalnie mały w porównaniu z zadaną siłą P (Do obliczeń przyjąć $OO_1 = 2OB = 2O_1C = OA = 2a$).

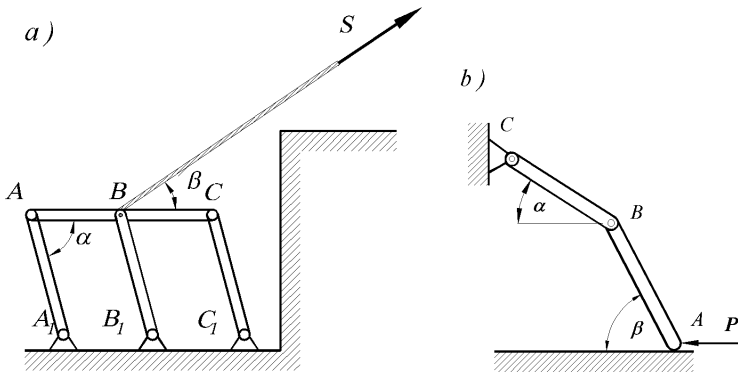
(Odpowiedź: $M = 2Pa \frac{\sin(\varphi - \psi) + 2 \sin \varphi}{\sin(\varphi - \psi) + 2 \sin \varphi}$).

Zadanie 74. Na układ złożony z czterech prętów (rys. 4.38a), z których każdy ma ciężar G , działa w punkcie B , nachylona do poziomu pod kątem β , siła S utrzymująca układ w równowadze. Jak wielka powinna być siła S , aby pręty tworzyły z poziomem kąt α ?

(Odpowiedź: $S = \frac{5G \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)}$).



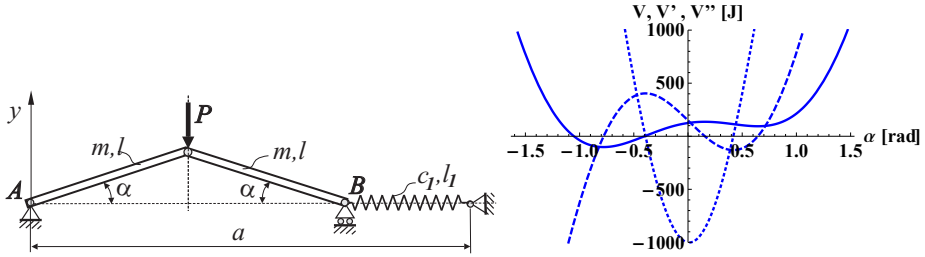
Rysunek 4.37: Rysunek do zadania 73



Rysunek 4.38: Rysunki do zadań 74 i 75

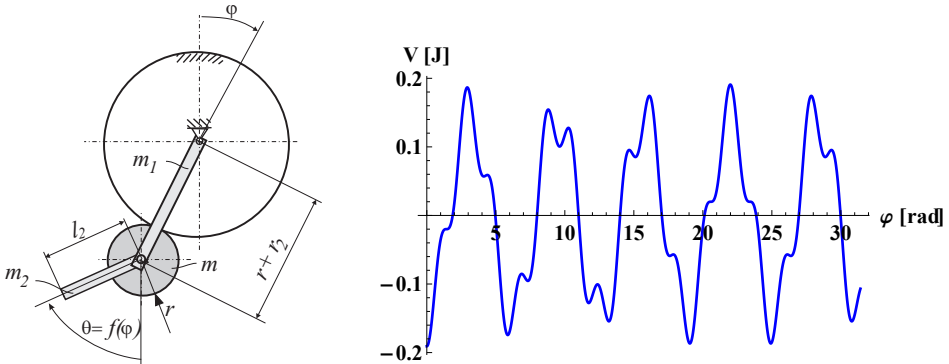
Zadanie 75. Dwa jednakowe pręty AB i BC (rys. 4.38b), każdy o ciężarze G , są połączone przegubem w punkcie B . Koniec C pręta BC jest ułożyskowany obrotowo, zaś koniec A pręta AB opiera się o gładką płaszczyznę poziomą. Jaka powinna być siła P , aby w równowadze pręty tworzyły z poziomem odpowiednio kąty α i β ? (Odpowiedź: $P = \frac{G}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$).

Zadanie 76. Określić położenie równowagi układu przedstawionego na rys. 4.39. Dane: $P = 200 \text{ N}$, $m = 10 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $l = 0,5 \text{ m}$, $l_1 = 0,2 \text{ m}$, $a = 0,95 \text{ m}$, $c_1 = 4000 \text{ N/m}^2$. Zbadać stateczność położenia równowagi dla małych kątów α (przyjmując, że $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$).



Rysunek 4.39: Rysunek do zadania 75 oraz przebiegi zmian energii potencjalnej V (linia ciągła), jej pierwszej pochodnej (linia przerywana) i drugiej pochodnej (linia kropkowana)

Zadanie 77. Dla układu przedstawionego na rys. 4.40, w którym tarcza ruchoma toczy się bez poślizgu po nieruchomym kole, narysować przebieg zmian energii potencjalnej w funkcji kąta φ (w zakresie $0 < \varphi < 6\pi$). Określić wartości kąta φ , dla których położenie równowagi jest stateczne³ i wskazać dla jakich wartości kąta φ położenie równowagi jest niestateczne. (Dane: m, r, m_1, m_2, l, r_2).

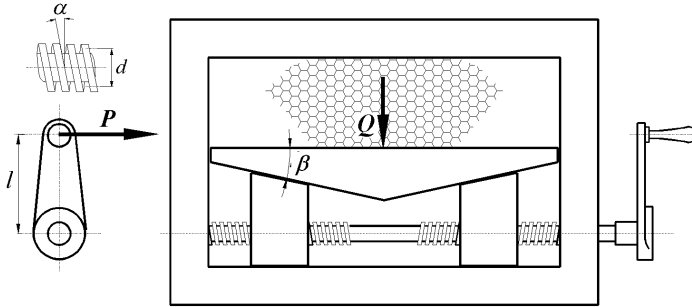


Rysunek 4.40: Rysunek do zadania 77 i przykładowy przebieg zmian energii potencjalnej układu (wyniki dla danych: $m_1 = 0,05 \text{ kg}$, $r = 0,07 \text{ m}$, $m = 0,01 \text{ kg}$, $r_2 = 0,16 \text{ m}$, $m_2 = 0,03 \text{ kg}$, $l = 0,3 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

Zadanie 78. Prasa składa się z trzech gładkich klinów i śruby. Kąt nachylenia ścian klinów wynosi β , a kąt nachylenia zwojów gwintu o średnicy

³Procedura, która umożliwia określenie przebiegu zmian energii potencjalnej dla tego układu jest zamieszczona na s. 220. Wyniki obliczeń są przedstawione na rys. C.4.

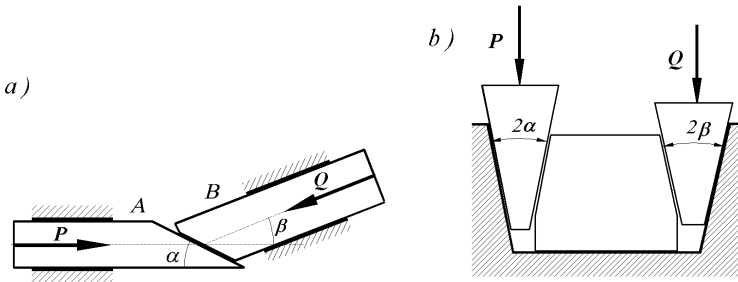
d wynosi α (skok gwintu $h = \pi d \operatorname{tg} \alpha$). Wyznaczyć w położeniu równowagi związek między siłą P obciążającą ramię l śruby i siłą Q działającą na górny klin (rys. 4.41).



Rysunek 4.41: Model prasy

(Odpowiedź: $Q = \frac{2Pl}{d \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$).

Zadanie 79. Dwa gładkie kliny mogą poruszać się w prowadnicach (rys. 4.42a). Kąty klinów wynoszą odpowiednio α i β . Wyznaczyć związek między siłami obciążającymi kliny P i Q w położeniu równowagi.



Rysunek 4.42: Rysunek do zadania 79 i 80

(Odpowiedź: $P = Q \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha)}$).

Zadanie 80. Gładkie ciało leżące na poziomej płaszczyźnie znajduje się między dwoma podwójnymi klinami o kątach nachylenia ścian 2β i 2α . Wyznaczyć w położeniu równowagi związek między pionowymi siłami Q i P obciążającymi kliny (rys. 4.42b). (Odpowiedź: $P = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$).

4.7 Równania Lagrange'a II-go rodzaju dla układów holonomicznych

Równania Lagrange'a II-go rodzaju służą do generowania różniczkowych równań ruchu we współrzędnych uogólnionych dla układów holonomicznych o więzach idealnych. Opis ruchu za pomocą współrzędnych uogólnionych oznacza, że równania więzów są spełnione tożsamościowo⁴. Ograniczenie klasy więzów, które mogą być nałożone na układ, do więzów idealnych (to jest takich, dla których suma prac sił reakcji więzów na przemieszczeniach przygotowanych jest równa zero) oznacza w praktyce, że równania Lagrange'a II-go rodzaju nie mogą być stosowane do analizy układów, w których występuje tarcie.

Do wyprowadzenia równań Lagrange'a drugiego rodzaju można wykorzystać ogólne równanie dynamiki (3.5), to jest

$$\sum_{i=1}^N (\vec{\mathbf{F}}_i - m_i \vec{\mathbf{a}}_i) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0, \quad (4.43)$$

gdzie:

m_i – masa i -tego punktu,

$\vec{\mathbf{a}}_i$ – jego przyspieszenie,

$\vec{\mathbf{F}}_i$ – wypadkowa sił aktywnych działających na i -ty punkt.

Wyrażenia (4.14)–(4.17) na pracę przygotowaną sił czynnych mają postać

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k, \quad (4.44)$$

gdzie

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.45)$$

Podobnie można przedstawić pracę przygotowaną "sił" bezwładności ($-m_i \vec{\mathbf{a}}_i$)

$$\delta L' = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{a}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n Q'_k \delta q_k, \quad (4.46)$$

⁴Układ, który nie podlega ograniczeniom ruchu w przestrzeni współrzędnych uogólnionych – jest układem swobodnym w tej przestrzeni.

przy czym

$$Q'_k = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (4.47)$$

Wykorzystując w równaniu (4.47) tożsamość

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right), \quad (4.48)$$

otrzymuje się

$$Q'_k = - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (4.49)$$

Uwzględniając, że prędkość jest określona zależnością

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad (4.50)$$

można – po zróżniczkowaniu jej względem \dot{q}_k oraz q_k – określić pochodne cząstkowe wektora $\dot{\vec{r}}_i$:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.52)$$

Wyrażenie (4.49) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} Q'_k &= - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \\ &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.53)$$

gdzie T oznacza energię kinetyczną, przy czym

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i. \quad (4.54)$$

Ogólne równanie dynamiki można zatem zapisać jako

$$\delta L + \delta L' = 0, \quad (4.55)$$

czyli

$$\sum_{k=1}^n (Q_k + Q'_k) \delta q_k = 0 \quad (4.56)$$

albo w postaci równania zwanego równaniem d'Alemberta – Lagrange'a o następującej budowie

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0. \quad (4.57)$$

Jeżeli rozpatrywany układ jest holonomiczny, wszystkie δq_k są od siebie niezależne, co powoduje, że równanie (4.56) jest spełnione tylko wówczas, gdy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.58)$$

Równania (4.58) nazywają się równaniami Lagrange'a II-go rodzaju.

Jeśli siły uogólnione Q_k są siłami potencjalnymi określonymi zależnościami (4.31), to znaczy

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4.59)$$

wówczas równania Lagrange'a II-go rodzaju (4.58) można przedstawić w formie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.60)$$

Funkcja \mathcal{L} nosi nazwę funkcji Lagrange'a – jest też nazywana lagranżjanem, a określona jest jako różnica energii kinetycznej i potencjalnej analizowanego układu ($\mathcal{L} = T - V$).

Równoważność wyrażeń (4.58) i (4.60) można pokazać różniczkując funkcję Lagrange'a względem współrzędnych uogólnionych i względem prędkości uogólnionych:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial(T - V)}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k, \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.62)$$

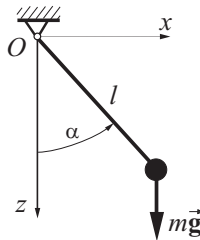
gdź $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ (energia potencjalna jest niezależna od prędkości uogólnionych).

Metoda budowania równań ruchu na podstawie równań Lagrange’a II-go rodzaju wymaga określenia liczby stopni swobody (n), wprowadzenia współrzędnych uogólnionych (q_1, \dots, q_n), w liczbie równej liczbie stopni swobody układu, a następnie określenia energii kinetycznej układu (T) i sił uogólnionych (Q_1, \dots, Q_n). Po wykonaniu operacji różniczkowania występujących we wzorze (4.58) otrzymuje się układ n – równań różniczkowych drugiego rzędu opisujących ruch układu pod wpływem zadanych obciążeń zewnętrznych.

Równania (4.58) pozwalają opisać ruch układu poprzez minimalną (najmniejszą z możliwych) liczbę równań różniczkowych. Ponadto, przy opisie ruchu we współrzędnych uogólnionych, nie pojawiają się równania więzów (układ ma pełną swobodę ruchu w zakresie zmian współrzędnych uogólnionych). Istotną cechą równań Lagrange’a jest globalny sposób traktowania całego układu – bez konieczności dokonywania podziału na podukłady i wprowadzania reakcji wzajemnego oddziaływania podukładów.

Równania ruchu określone na podstawie równań Lagrange’a II-go rodzaju mają też pewne wady: otrzymane równania ruchu są zazwyczaj silnie nieliniowe, nie pozwalają na bezpośrednie określenie reakcji wzajemnego oddziaływania podukładów, a także ograniczony jest zakres zastosowań (do układów holonomicznych o więzach idealnych).

Przykład 4.7.81. Korzystając z równań Lagrange’a II-go rodzaju napisać równania ruchu dla wahadła matematycznego (rys. 4.43).



Rysunek 4.43: Wahadło matematyczne

Jako współrzędną uogólnioną (układ ma jeden stopień swobody) przyjmujemy kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi ($q = \alpha$). Zgodnie z wzorem (4.58) do zbudowania równań ruchu na podstawie równań Lagrange'a II-go rodzaju należy określić energię kinetyczną układu i siły uogólnione. W analizowanym przypadku $T = \frac{1}{2}m(\dot{q}l)^2$. Siłę uogólnioną możemy obliczyć jako pochodną cząstkową energii potencjalnej $V = -mgl \cos q$.

Obliczamy kolejno:

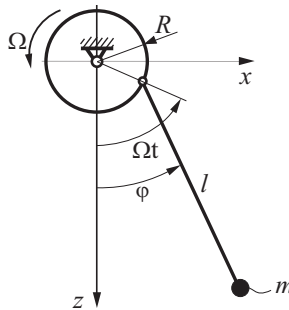
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = ml^2 \ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0,$$

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial q} = -mgl \sin q.$$

Równanie ruchu ma postać

$$ml^2 \ddot{q} = -mgl \sin q.$$

Przykład 4.7.82. Opisać ruch wahadła o długości l i masie m , którego koniec zamocowany jest do koła o promieniu R , obracającego się ze stałą prędkością kątową Ω (rys. 4.44).



Rysunek 4.44: Wahadło z ruchomym punktem zawieszenia

Układ ma jeden stopień swobody – jako współrzędna uogólniona jest przyjęty kąt odchylenia wahadła od pionu.

Zależności pozwalające na wyznaczenie równań ruchu przy użyciu równań Lagrange'a są następujące:

– współrzędne określające położenie punktu materialnego o masie m

$$x = R \sin \Omega t + l \sin \varphi, \quad z = R \cos \Omega t + l \cos \varphi,$$

– składowe prędkości punktu

$$\dot{x} = R\Omega \cos \Omega t + l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{z} = -R\Omega \sin \Omega t - l\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

– energia kinetyczna T

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left[R^2\Omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2Rl\Omega\dot{\varphi} \cos(\Omega t - \varphi) \right],$$

– energia potencjalna V

$$V = -mgz = -mg(R \cos \Omega t + l \cos \varphi).$$

Wyznaczając pochodne występujące w równaniach Lagrange'a II-go rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi,$$

otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \left[l^2 \ddot{\varphi} - Rl\Omega(\Omega - \dot{\varphi}) \sin(\Omega t - \varphi) \right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m (Rl\Omega\dot{\varphi} \sin(\Omega t - \varphi)),$$

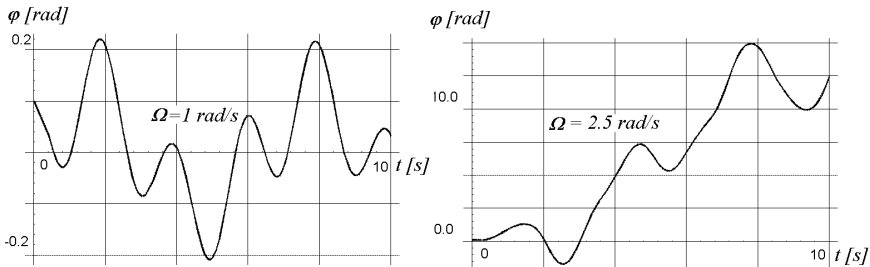
$$Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Równanie ruchu ma postać

$$m \left[l^2 \ddot{\varphi} - Rl\Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi) \right] = -mgl \sin \varphi.$$

Analityczne rozwiązanie otrzymanego równania ruchu jest skomplikowane. Rozwiązanie numeryczne nie stanowi żadnego problemu.

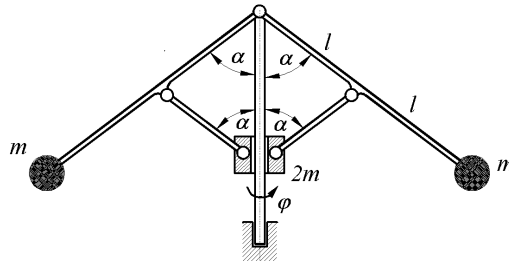
Przebiegi zmian kąta wychylenia wahadła dla $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $R = 1$ m (przy warunkach początkowych $\varphi(0) = 0,1$ rad, $\dot{\varphi}(0) = 0$) są pokazane na rys. 4.45.



Rysunek 4.45: Wyniki obliczeń dla $\Omega = 1 \text{ rad/s}$ i $\Omega = 2,5 \text{ rad/s}$

Przykład 4.7.83. Przedstawionemu na rysunku 4.46 regulatorowi odśrodkowemu została nadana prędkość kątową (ω_0) wokół pionowej nieruchomej osi. Opisać ruch bezwładny regulatora przy założeniach:

- masy prętów są małe (lekkie pręty),
- kulki na końcach prętów mają masy m i można je traktować jak punkty materialne,
- masa tulei poruszającej się wzdłuż pionowej osi wynosi $2m$ i można ją traktować jak punkt materialny.



Rysunek 4.46: Regulator odśrodkowy

Liczba stopni swobody układu $n = 2$. Jako współrzędne uogólnione zostały wybrane:

- kąt wychylenia ramion regulatora $q_1 = \alpha$,
- kąt obrotu wokół osi pionowej $q_2 = \varphi$.

Energia kinetyczna układu przy tak obranych współrzędnych jest określona zależnością

$$T = 2\frac{1}{2}m \left[(2l\dot{q}_1)^2 + (2l\dot{q}_2 \sin q_1)^2 \right] + \frac{1}{2}2m (2l\dot{q}_1 \sin q_1)^2 ,$$

a energia potencjalna

$$V = -2mg2l \cos q_1 - 2mg2l \cos q_1 .$$

Dla regulatora należy napisać dwa równania Lagrange'a; pierwsze wymaga określenia wielkości:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = 4l^2 m \left[2\dot{q}_1^2 \sin(2q_1) + 3\ddot{q}_1 - \dot{q}_1 \cos(2q_1) \right] ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = -4l^2 m \sin(2q_1) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) ,$$

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = -8glm \sin q_1 ;$$

drugie równanie można otrzymać z zależności

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 ,$$

po wyznaczeniu wielkości:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = 8l^2 m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) + 8l^2 m \ddot{q}_2 \sin^2(q_1) ,$$

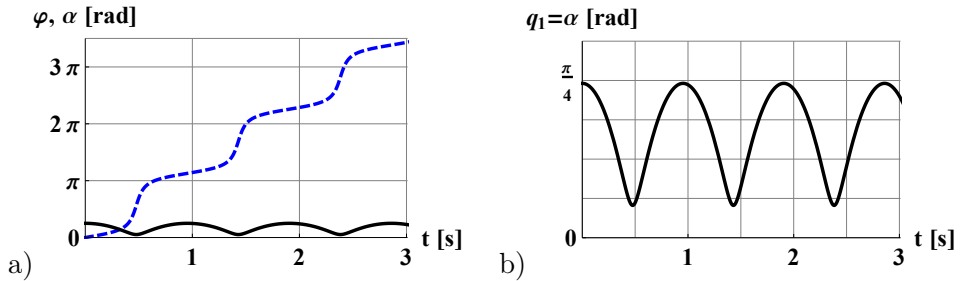
$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0 , \quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 .$$

Ostatecznie uzyskuje się dwa równania ruchu:

$$4lm \left[2g \sin q_1 + l\dot{q}_1^2 \sin(2q_1) - l\dot{q}_2^2 \sin(2q_1) + 3l\ddot{q}_1 - l\dot{q}_1 \cos(2q_1) \right] = 0 ,$$

$$8l^2 m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) + 8l^2 m \ddot{q}_2 \sin^2(q_1) = 0 .$$

Numeryczne rozwiązanie zostało wyznaczone dla danych: $m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$ oraz warunków początkowych: $\alpha(0) = \pi/3 \text{ rad}$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$, $\omega_0 = \dot{\varphi}(0) = 1,75 \text{ rad/s}$. Przebiegi zmian współrzędnych ($q_1 = \alpha$, $q_2 = \varphi$) otrzymane z rozwiązania numerycznego pokazane są na rys. 4.47. Zmiany kąta $q_2 = \varphi$, opisującego obrót regulatora wokół pionowej osi, są nieliniową funkcją czasu, a to oznacza że prędkość wirowania regulatora (ω) jest zmienna.



Rysunek 4.47: Wyniki obliczeń numerycznych dla regulatora (α – linia ciągła, φ – linia przerywana)

Przykład 4.7.84. Korzystając z równań Lagrange’a II-go rodzaju określić równania dynamiki ciała o masie m_1 dla układu przedstawionego na rys. 4.48a (i na rys. 4.30a) przy założeniu, że wychylenia układu są małe. Wielkości zadane są oznaczone na rysunku odpowiednimi symbolami.

Położenie układu przedstawione na rys. 4.48a nie jest położeniem równowagi.

1. Położenie równowagi układu. Siły działające na rozpatrywany układ są siłami potencjalnymi. Układ ma jeden stopień swobody, a jako współrzędna uogólniona przyjęte zostało przemieszczenie obciążnika o masie m_1 . Położenie równowagi rozpatrywanego tu układu zostało określone w przykładzie zamieszczonym w punkcie 4.6.1.

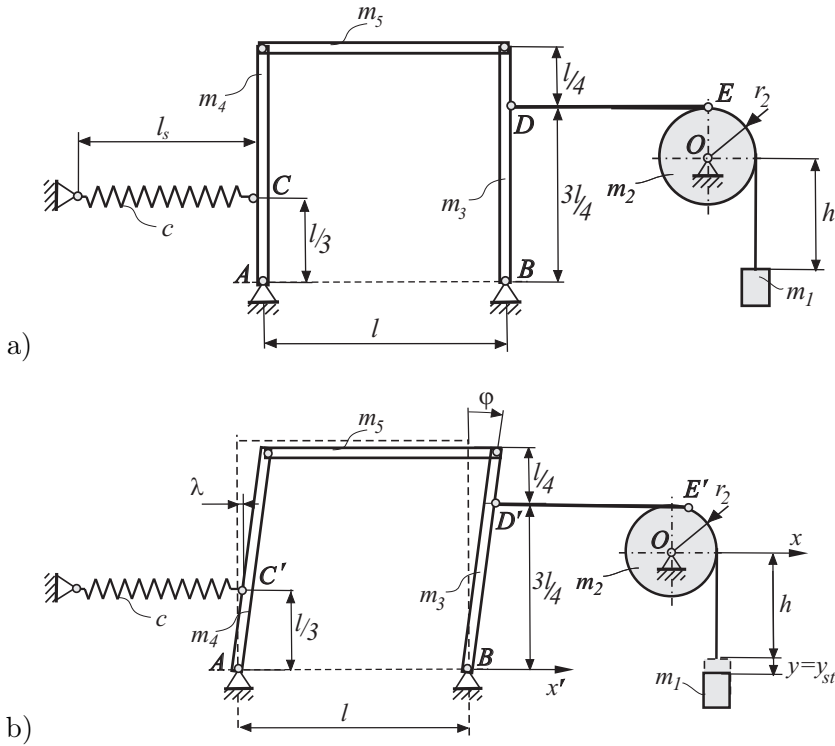
Przyjmując założenie o małych kątach odchyleniach prętów od pionu, można pominąć wpływ zmiany kierunku sprężyny i liny na wartość energii potencjalnej. Całkowita energia potencjalna układu będzie wówczas określona przybliżoną zależnością

$$V = -m_1 g(h + y) + m_3 g \frac{l}{2} \cos\left(\frac{4}{3l}y\right) + m_4 g \frac{l}{2} \cos\left(\frac{4}{3l}y\right) + \\ + m_5 g l \cos\left(\frac{4}{3l}y\right) + \frac{1}{2} c \left(\frac{4}{9}y\right)^2,$$

w której użyto podstawienia $\varphi = \frac{4y}{3l}$.

Pochodna energii potencjalnej względem współrzędnej y jest równa

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -m_1 g - m_3 g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \sin\left(\frac{4}{3l}y\right) - m_4 g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \sin\left(\frac{4}{3l}y\right) + \\ - m_5 g l \frac{4}{3l} \sin\left(\frac{4}{3l}y\right) + c \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}y\right).$$



Rysunek 4.48: Model układu: a) w położeniu odniesienia, b) w położeniu równowagi

Położenie równowagi $y = y_{st}$ układu – jest określone na podstawie warunku istnienia ekstremum energii potencjalnej

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=y_{st}} = 0 .$$

Przyjmując, że dla małych kątów φ można przyjąć $\sin \varphi \cong \varphi$, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=y_{st}} &= -m_1 g - m_3 g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \left(\frac{4}{3l} y \right) - m_4 g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \left(\frac{4}{3l} y \right) + \\ &- m_5 g l \frac{4}{3l} \left(\frac{4}{3l} y \right) + c \left(\frac{4}{9} y \right) = 0 , \end{aligned}$$

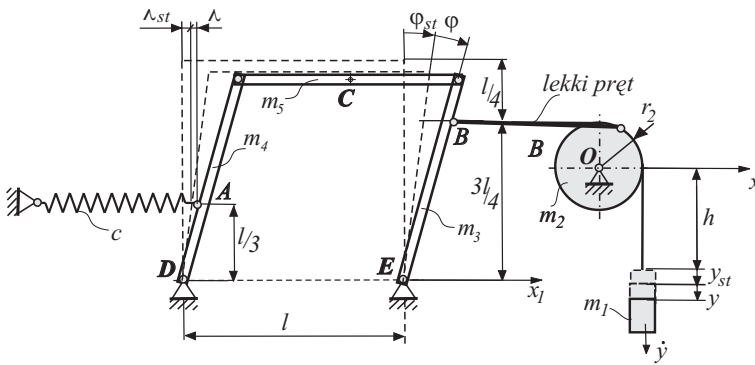
stąd

$$-m_1 g - \frac{8}{9l} m_3 g y_{st} - \frac{8}{9l} m_4 g y_{st} - \frac{16}{9l} m_5 g y_{st} + \frac{16}{81} c y_{st} = 0 ,$$

a po rozwiązaniu

$$y_{st} = \frac{m_1 g}{-\frac{8}{9l} m_3 g - \frac{8}{9l} m_4 g - \frac{16}{9l} m_5 g + \frac{16}{81} c}.$$

2. Wyznaczenia równań ruchu (opisujących małe drgania układu wokół położenia równowagi statycznej.) Model układu w położeniu wychylonym z położenia równowagi jest pokazany na rys. 4.49 (zmienna y oznacza tu przemieszczenie ciała o masie m_1 z położenia równowagi statycznej).



Rysunek 4.49: Model układu w położeniu wychylonym z położenia równowagi

Równania Lagrange'a II-go rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n$$

dla układu o jednym stopniu swobody ($n = 1$, $q_1 = y$) i obciążeniach potencjalnych, sprowadzają się do jednego równania o postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Energia potencjalna rozpatrywanego układu w położeniu wychylonym z położenia równowagi (określonym współrzędną y , kątem φ i wydłużeniem λ , ale tym razem odmierzonymi od położenia równowagi) jest równa

$$V = -m_1 g (h + y_{st} + y) + m_3 g \frac{l}{2} \cos(\varphi_{st} + \varphi) + m_4 g \frac{l}{2} \cos(\varphi_{st} + \varphi) +$$

$$+m_5gl \cos(\varphi_{st} + \varphi) + \frac{1}{2}c(\lambda_{st} + \lambda)^2,$$

przy czym:

$$\varphi = \frac{4}{3l}y, \quad \varphi_{st} = \frac{4}{3l}y_{st}, \quad \lambda = \frac{4}{9}y, \quad \lambda_{st} = \frac{4}{9}y_{st}.$$

Zatem

$$V = -m_1g(h + y_{st} + y) + (m_3 + m_4)g\frac{l}{2} \cos\left(\frac{4}{3l}y_{st} + \varphi\right) + \\ + m_5gl \cos\left(\frac{4}{3l}y_{st} + \varphi\right) + \frac{1}{2}c\left(\frac{4}{9}y_{st} + \lambda\right)^2.$$

Energia kinetyczna rozpatrywanego układu jest sumą energii kinetycznej wszystkich ciał (rys. 4.49), to znaczy

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_E\omega_3^2 + \frac{1}{2}J_D\omega_4^2 + \frac{1}{2}m_5v_C^2,$$

przy czym:

$$J_2 = \frac{m_2r_2^2}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\dot{y}}{r_2}, \quad J_E = \frac{m_3l^2}{3}, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{\frac{3}{4}l} = \frac{4\dot{y}}{3l}, \\ J_D = \frac{m_4l^2}{3}, \quad \omega_4 = \omega_3 = \frac{4\dot{y}}{3l},$$

natomiast wartość prędkości v_C jest wyznaczona jako

$$v_C = l \frac{d}{dt}(\varphi_{st} + \varphi) = l\dot{\varphi} = l\omega_3 = \frac{4\dot{y}}{3}$$

(ciało porusza się ruchem postępowym, więc wszystkie punkty należące do tego ciała mają taką samą prędkość).

Po podstawieniu wyżej określonych wielkości energia kinetyczna przyjmuje formę

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2r_2^2}{2} \left(\frac{\dot{y}}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3l^2}{3} \left(\frac{4\dot{y}}{3l}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_4l^2}{3} \left(\frac{4\dot{y}}{3l}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}m_5 \left(\frac{4\dot{y}}{3}\right)^2,$$

a po uporządkowaniu

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{16}{27}m_3 + \frac{16}{27}m_4 + \frac{16}{9}m_5 \right) \dot{y}^2.$$

Pochodne energii kinetycznej i potencjalnej występujące w równaniu Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= \left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{16}{27}m_3 + \frac{16}{27}m_4 + \frac{16}{9}m_5 \right) \dot{y}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= \left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{16}{27}m_3 + \frac{16}{27}m_4 + \frac{16}{9}m_5 \right) \ddot{y}, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= -m_1g - (m_3 + m_4)g \frac{l}{2} \frac{4}{3l} \sin \left(\frac{4}{3l}y_{st} + \frac{4}{3l}y \right) + \\ &\quad -m_5gl \frac{4}{3l} \sin \left(\frac{4}{3l}y_{st} + \frac{4}{3l}y \right) + \frac{4}{9}c \left(\frac{4}{9}y_{st} + \frac{4}{9}y \right).\end{aligned}$$

Przyjmując, że $\sin \left(\frac{4}{3l}y_{st} + \frac{4}{3l}y \right) \cong \left(\frac{4}{3l}y_{st} + \frac{4}{3l}y \right)$, otrzymuje się

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &\cong -m_1g - \frac{8}{9l}(m_3 + m_4)g(y_{st} + y) - \frac{16}{9l}m_5g(y_{st} + y) + \frac{16}{81}c(y_{st} + y) = \\ &= -m_1g + \left(-\frac{8}{9l}(m_3 + m_4)g - \frac{16}{9l}m_5g + \frac{16}{81}c \right) y_{st} + \\ &\quad + \left(-\frac{8}{9l}(m_3 + m_4)g - \frac{16}{9l}m_5g + \frac{16}{81}c \right) y.\end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości y_{st} , otrzymanej z rozwiązania zagadnienia równowagi, pochodna energii potencjalnej sprowadza się do

$$\frac{\partial V}{\partial y} \cong \left(-\frac{8}{9l}(m_3 + m_4)g - \frac{16}{9l}m_5g + \frac{16}{81}c \right) y.$$

Na podstawie równania Lagrange'a otrzymuje się równanie dynamiki opisujące małe drgania układu wokół położenia równowagi

$$\begin{aligned}\left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{16}{27}m_3 + \frac{16}{27}m_4 + \frac{16}{9}m_5 \right) \ddot{y} &= \\ &= - \left(-\frac{8}{9l}(m_3 + m_4)g - \frac{16}{9l}m_5g + \frac{16}{81}c \right) y\end{aligned}$$

lub krótko

$$m_{red} \ddot{y} + k_{red} y = 0,$$

gdzie:

$$\begin{aligned}m_{red} &= m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{16}{27}m_3 + \frac{16}{27}m_4 + \frac{16}{9}m_5, \\ k_{red} &= -\frac{8}{9l}(m_3 + m_4)g - \frac{16}{9l}m_5g + \frac{16}{81}c.\end{aligned}$$

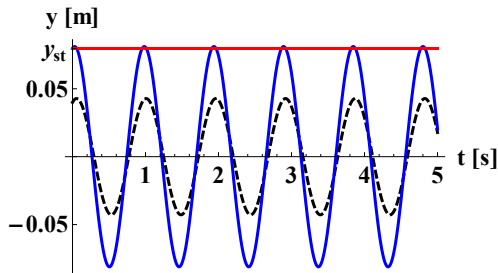
3. Rozwiązanie równań opisujących dynamikę układu. *Analitycznym rozwiązaniem jednorodnego równania różniczkowego $m_{red} \ddot{y} + k_{red} y = 0$ jest funkcja o postaci*

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

o częstości kołowej

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{red}}{m_{red}}} .$$

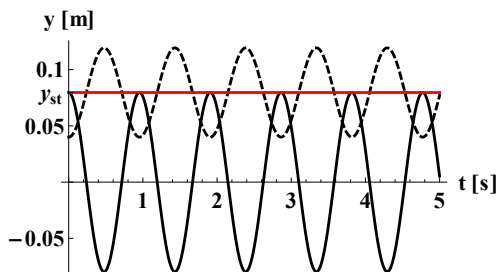
Amplituda drgań (A) i przesunięcie fazowe (φ_0) są wielkościami zależnymi od położenia początkowego i prędkości początkowej. Na rysunku 4.50 są przedstawione przebiegi rozwiązania dla różnych warunków początkowych: $y(0) = 0,04 \text{ m}$, $y'(0) = 0,1 \text{ m/s}$ oraz dla $y(0) = 0,08 \text{ m}$, $y'(0) = 0,1 \text{ m/s}$.



Rysunek 4.50: Porównanie wyników rozwiązań numerycznych dla różnych warunków początkowych: $y(0) = 0,04 \text{ m}$, $y'(0) = 0,1 \text{ m/s}$ – linia ciągła oraz dla: $y(0) = 0,08 \text{ m}$, $y'(0) = 0,1 \text{ m/s}$ – linia przerywana (wyniki dla danych $c = 4000 \text{ N/m}$, $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $m_3 = 2 \text{ kg}$, $m_4 = 2 \text{ kg}$, $m_5 = 3 \text{ kg}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $h = 0,2 \text{ m}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0,1 \text{ m/s}$)

Pominięcie wstępnego odkształcenia sprężyny przy wyznaczaniu energii potencjalnej układu prowadzi do niejednorodnego równania różniczkowego (o postaci $m_{red} \ddot{y} + k_{red} y = C$), którego rozwiązanie przedstawia drgania wokół położenia równowagi statycznej (rys. 4.51).

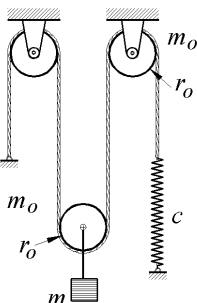
Z porównania rezultatów przedstawionych na rys. 4.50 i 4.51 wynika, że określenie położenia równowagi statycznej układu ma istotny wpływ na przebieg rozwiązania – decyduje o zakresie wahań (ale nie wpływa na częstość drgań).



Rysunek 4.51: Porównanie wyników rozwiązań przy uwzględnieniu wstępnego napięcia sprężyny (linie ciągłe) i przy pominięciu wstępnego napięcia sprężyny (linia przerywana)

4.7.1 Zadania do rozwiązania – równania Lagrange’a II-go rodzaju

Zadanie 85. Przez układ bloków (o masach m_0 i promieniach r_0), z których jeden jest ruchomy i połączony z ciężarem o masie m , przerzucono nieważki sznur (rys. 4.52), a do końca sznura dołączono pionową sprężynę o stałej c . Obliczyć okres drgań.



Rysunek 4.52: Rysunek do zadania 85

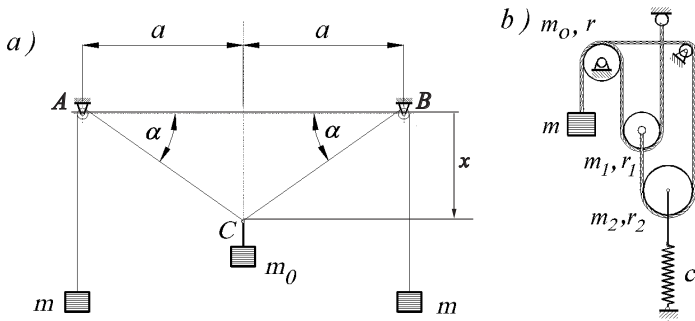
(Odpowiedź: $\tau = \pi \sqrt{\frac{7m_0 + 2m}{2c}}$).

Zadanie 86. Dwa jednakowe ciężary o masach m przymocowano do końców nieważkiego sznura przerzuconego przez dwa lekkie bloki (rys. 4.53a). Pomiędzy blokami zawieszono na sznurze ciężar o masie m_0 . Odległość pomiędzy blokami jest $2a$. Napisać równanie ruchu ciała o masie m_0 zakładając,

że ciała poruszają się jedynie w kierunku pionowym.

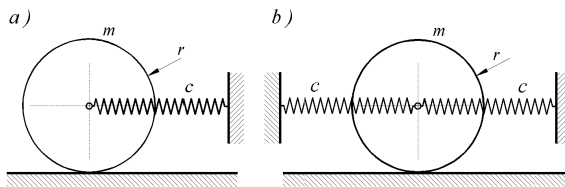
$$(\text{Odpowiedź: } -m_0g + \frac{2gx}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{2mx\dot{x}^2}{a^2+x^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+x^2}\right) + \left(m_0 + \frac{2mx^2}{a^2+x^2}\right) \ddot{x} = 0).$$

Zadanie 87. Przez układ bloków (o masach $m_0 = m_1 = m_2 = m$ i promieniach r , r_1 i r_2), z których dwa są ruchome, a jeden jest osadzony na poziomej nieruchomej osi, przetrzucono dwa nieważkie sznury (rys. 4.53b). Do końca jednego sznura dołączono ciężar o masie m (rys. 4.53b). Środek bloku o masie m_2 połączono z ostoją pionową sprężyną o stałej c . Obliczyć okres drgań układu (Odpowiedź: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{79m}{18c}}$).



Rysunek 4.53: Rysunki do zadań 86 i 87

Zadanie 88. Jednorodny walec o masie m i promieniu r może ślizgać się po poziomej gładkiej płaszczyźnie (rys. 4.54a). Do jego środka jest przymocowana pozioma sprężyna, o stałej c . Obliczyć okres drgań walca (Odpowiedź: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$).

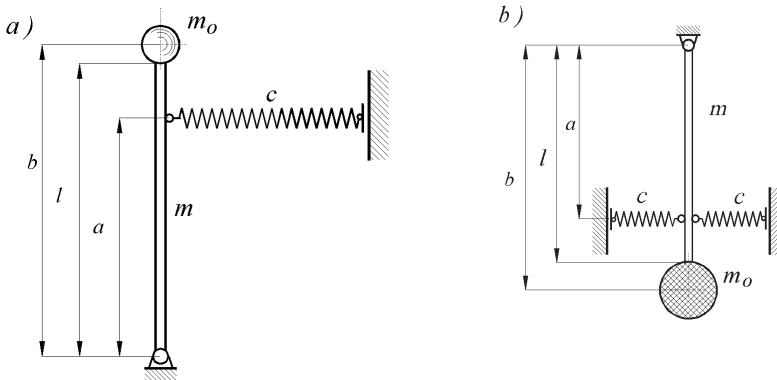


Rysunek 4.54: Rysunki do zadań 88 i 89

Zadanie 89. Jednorodny walec o masie m i promieniu r może toczyć się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie (rys. 4.54b). Do jego środka są przymocowane dwie jednakowe poziome sprężyny, z których każda ma stałą sztywność c . Obliczyć okres drgań walca (Odpowiedź: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4c}}$).

Zadanie 90. Układ składa się z pionowego pręta o długości l i masie m , zamocowanego przegubowo w dolnym końcu oraz kulki o masie m_0 i środku znajdującym się w odległości b od przegubu walcowego (rys. 4.55a). Do pręta jest przymocowana sprężyna w odległości a od jej dolnego końca (oś sprężyny pozostaje pozioma). Znając stałą c sprężyny, znaleźć okres małych drgań (Odpowiedź: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3} + m_0(b^2 + \frac{2}{5}(b-l)^2)}{ca^2 - \frac{(ml+2m_0b)g}{2}}}$).

Zadanie 91. Wahadło (rys. 4.55b) składa się z pionowego pręta o długości l i masie m , zamocowanego w górnym końcu przegubowo oraz kulki o masie m_0 i środku znajdującym się w odległości b od przegubu walcowego. Do pręta są przymocowane dwie sprężyny w odległości a od jego górnego końca. Przeciwnie końce sprężyn zamocowane są w ten sposób, że osie ich zachowują kierunek poziomy. Znając współczynniki sztywności sprężyn $c_1 = c_2 = c$, wyznaczyć okres małych drgań wahadła.



Rysunek 4.55: Rysunek do zadania 90 i 91

$$(Odpowiedź: \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3} + m_0(b^2 + \frac{2}{5}(b-l)^2)}{2ca^2 + \frac{(ml+2m_0b)g}{2}}}).$$

Rozdział 5

WPROWADZENIE DO DYNAMIKI UKŁADÓW NIEHOLONOMICZNYCH

W wielu zadaniach więzy nałożone na układ są zależne od prędkości. Pojawiają się one przede wszystkim w zagadnieniach związanych ze sterowaniem ruchem ciał. Przykładami maszyn, w których występują więzy kinematyczne, są urządzenia pracujące w zautomatyzowanych systemach produkcyjnych, transportowych – roboty, suwnice itp. Analiza układów nieholonomicznych jest szeroko omawiana w pracy Nejmarka i Fufajewa [20], a także w pracach [3, 4, 5, 12, 17, 18].

Metody rozwiązywania układów, na które są nałożone więzy kinematyczne, mogą być stosowane przy rozwiązywaniu układów o więzach geometrycznych – jeśli więzy zostaną przedstawione w postaci kinematycznej.

Przedstawione wcześniej równania Lagrange’a I-go rodzaju umożliwiają opis ruchu układów nieholonomicznych (i holonomicznych) we współrzędnych kartezjańskich $(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, z_1, \dots, z_N)$, gdzie N oznacza liczbę punktów materialnych analizowanego układu).

5.1 Równania Lagrange’a II-go rodzaju dla układów nieholonomicznych

Równania Lagrange’a II-go rodzaju, w których korzysta się ze współrzędnych uogólnionych (q_1, \dots, q_n) , przy czym n oznacza liczbę współrzed-

nych uogólnionych niezbędna do opisanie ruchu układu) mogą być używane również do badania ruchu układów nieholonomicznych, ale mają nieco inną formę niż określona wzorem (4.58).

Wykorzystując równanie d'Alemberta – Lagrange'a (4.57), to jest równanie o postaci

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \quad (5.1)$$

należy zwrócić uwagę na to, że dla układu nieholonomicznego przemieszczenia przygotowane $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ są od siebie zależne (niezależne są współrzędne uogólnione). Mamy bowiem r równań więzów kinematycznych¹

$$g_s \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_{sk} \dot{q}_k + \alpha_{s0} = 0, \quad (s = 1, \dots, r) \quad (5.2)$$

oraz wynikające z nich zależności pomiędzy uogólnionymi przemieszczeniami przygotowanymi δq_k

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{sk} \delta q_k = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (5.3)$$

Spośród n przemieszczeń przygotowanych niezależnych jest $n - r$ przemieszczeń (oznaczone będą dalej jako δq_i , gdzie $i = 1, \dots, n - r$), a pozostałe r to przemieszczenia zależne (oznaczone dalej jako δq_j , przy czym $j = n - r + 1, \dots, n$). Zależne przemieszczenia przygotowane można przedstawić jako

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{n-r} \beta_{ji} \delta q_i, \quad (j = n - r + 1, \dots, n). \quad (5.4)$$

Liczba stopni swobody układu nieholonomicznego (n_s) jest równa liczbie ($n_s = n - r$) niezależnych uogólnionych przemieszczeń przygotowanych (δq_i), przy czym n oznacza liczbę niezależnych współrzędnych koniecznych do opisanie ruchu takiego układu, a r jest liczbą równań więzów kinematycznych.

¹Ograniczamy się do analizy układów o więzach kinematycznych liniowo zależnych od prędkości uogólnionych. Przy określeniu liczby stopni swobody układu nieholonomicznego, którego ruch jest opisany poprzez współrzędne uogólnione przyjęto, że więzy geometryczne są spełnione tożsamościowo – zatem ich liczba $k = 0$.

Liczba niezależnych współrzędnych (n) koniecznych do opisanie ruchu układu nieholonomicznego jest większa od liczby stopni swobody o r , to jest o liczbę niecałkowalnych równań więzów kinematycznych ($n = n_s + r$).

W analizie ruchu układów o więzach kinematycznych z wykorzystaniem formalizmu równań Lagrange'a II-go rodzaju (4.57) są stosowane trzy podejścia:

- metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange'a,
- eliminacja zależnych przemieszczeń przygotowanych i zastąpienie ich dowolnymi niezależnymi przemieszczeniami wirtualnymi,
- wprowadzenie parametrów kinematycznych (równania Maggi'ego).

Wymienione sposoby podejścia są omówione w kolejnych podrozdziałach.

5.1.1 Równania Lagrange'a drugiego rodzaju z mnożnikami

Jeśli każdą z kolejnych r zależności (5.3) pomnożyć przez wielkość (funkcję) $-\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_r$

$$\begin{aligned} -\mu_1 \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} \delta q_k &= 0, \\ \dots\dots\dots & \quad (s = 1, \dots, r) \\ -\mu_r \sum_{k=1}^n \alpha_{rk} \delta q_k &= 0, \end{aligned}$$

a następnie zsumować tak otrzymane równania, to wynik można zapisać w formie jednego równania o postaci

$$-\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^r \mu_s \alpha_{sk} \delta q_k = 0 \quad (5.5)$$

($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ są nazywane nieoznaczonymi mnożnikami Lagrange'a).

Jeśli do równania d'Alemberta – Lagrange'a, to znaczy do równania o postaci

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \quad (5.6)$$

dobędziemy zależność (5.5), to otrzymamy nowe równanie w formie

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{s=1}^r \mu_s \alpha_{sk} \right) \delta q_k = 0. \quad (5.7)$$

Równanie (5.7) będzie spełnione, jeśli wszystkie składniki sumy będą równe zero, a więc, jeśli spełniony będzie układ n równań:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 - \sum_{s=1}^r \mu_s \alpha_{s1} \right) \delta q_1 = 0,$$

..... (5.8)

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} - Q_n - \sum_{s=1}^r \mu_s \alpha_{sn} \right) \delta q_n = 0.$$

Ponieważ niezależne przemieszczenia przygotowane δq_i w liczbie $n - r$ są dowolnymi niezerowymi wielkościami ($\delta q_i \neq 0$), to spełnienie $n - r$ równań układu (5.8) będzie możliwe, jeśli

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{s=1}^r \mu_s \alpha_{sk} = 0, \quad (k = 1, \dots, n - r). \quad (5.9)$$

Pozostałe r równań układu (5.8) zawiera zależne przemieszczenia przygotowane δq_j ($j = n - r + 1, \dots, r$). Należy więc dobrać mnożniki μ_s w taki sposób, by spełnione były również i te równania, to znaczy wymagamy by

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{s=1}^r \mu_s \alpha_{sk} = 0, \quad (k = n - r + 1, \dots, n). \quad (5.10)$$

Ostatecznie, dla określenia ruchu układu nieholonomicznego we współrzędnych uogólnionych q_k , mamy do dyspozycji n równań Lagrange'a II rodzaju (5.9)–(5.10) z mnożnikami μ_s oraz r równań więzów kinematycznych (5.2). Układ $n + r$ równań o postaci:

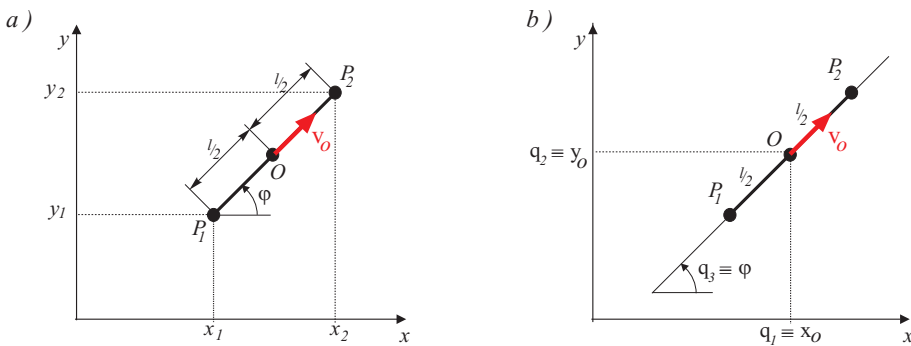
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{s=1}^r \mu_s \alpha_{sk}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5.11)$$

$$g_s \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_{sk} \dot{q}_k + \alpha_{s0} = 0, \quad (s = 1, \dots, r) \quad (5.12)$$

umożliwia wyznaczenie $n + r$ niewiadomych funkcji q_k i μ_s ($k = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, r$).

Należy zwrócić uwagę, że równania (5.11), (5.12) są układem równań różniczkowo-algebraicznych (nie występują w nich pochodne niewiadomych wielkości μ_s), a ich numeryczne rozwiązanie wymaga użycia odpowiednich dla takiego układu równań metod.

Przykład 5.1.92. Z badać ruch układu dwóch punktów materialnych P_1 i P_2 o masach m_1 oraz m_2 , połączonych lekkim, sztywnym prętem o długości l i poruszających się po poziomej, gładkiej płaszczyźnie xy pod działaniem zadanej siły \vec{F} (przyłożonej w punkcie P_2). Ponadto będziemy żądać, by wektor prędkości środka pręta miał mieć zawsze kierunek pręta (rys. 5.1). Dodatkowo zadane są: położenie i prędkość początkowa układu.



Rysunek 5.1: Łyżwa – współrzędne kartezjańskie i współrzędne uogólnione

Jeśli do opisu ruchu układu (rys. 5.1a) zostaną użyte współrzędne kartezjańskie x_1, y_1, x_2, y_2 , to konieczne będzie określenie równań więzów geometrycznych i kinematycznych.

Ograniczeniem nałożonym na rozpatrywany model jest stała odległość między punktami P_1 i P_2 , co przedstawia się w formie równania

$$f_1 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - l^2 = 0 .$$

Drugim ograniczeniem nałożonym na ruch badanego układu jest narzucony kierunek prędkości środka pręta (punktu O). Analitycznie ograniczenie to można przedstawić za pomocą związku

$$g_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\dot{x}_1 + \dot{x}_2} = 0 ,$$

który otrzymano poprzez porównanie tangensów kątów odchylenia pręta i prędkości środka pręta od poziomej osi. Jest to równanie więzów kinematycznych (a zatem układ jest nieholonomiczny).

Dla rozpatrywanego układu liczba równań więzów geometrycznych $k = 1$ oraz liczba równań więzów kinematycznych $r = 1$.

Liczba stopni swobody rozpatrywanego układu $n_s = 2N - k - r = 2 \times 2 - 1 - 1 = 2$ (jest równa liczbie niezależnych przemieszczeń przygotowanych), natomiast liczba niezależnych współrzędnych $n = 2N - k = n_s + r = 3$ (jest większa od liczby stopni swobody o r , to jest o liczbę niecałkowalnych równań więzów kinematycznych). Inaczej mówiąc, liczba stopni swobody rozpatrywanego układu nieholonomicznego $n_s = n - r = 3 - 1 = 2$.

Wprowadzając niezależne współrzędne uogólnione, takie że $q_1 \equiv x_0$, $q_2 \equiv y_0$, $q_3 \equiv \varphi$ (rys. 5.1b), zapewnimy tożsamościowe spełnienie równań więzów geometrycznych². Równanie więzów kinematycznych we współrzędnych uogólnionych przyjmuje dla obranych współrzędnych postać

$$\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{albo} \quad g_s = \dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi = 0, \quad (s = 1),$$

co oznacza, że współczynniki α_{sk} występujące we wzorze (5.3) wynoszą odpowiednio:

$$\alpha_{11} = \sin \varphi, \quad \alpha_{12} = -\cos \varphi, \quad \alpha_{13} = 0.$$

Zależność pomiędzy przemieszczeniami przygotowanymi otrzymana z równania więzów (więzy skleronomiczne, dla których $\delta x_0 = \dot{x}_0 dt$, $\delta y_0 = \dot{y}_0 dt$) jest następująca

$$\delta x_0 \sin \varphi - \delta y_0 \cos \varphi = 0.$$

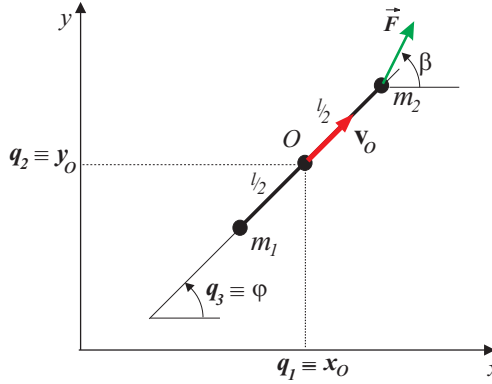
Energia kinetyczna analizowanego układu jest określona jako

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

a po podstawieniu $x_1 = x_0 - \frac{l}{2} \cos \varphi$, $x_2 = x_0 + \frac{l}{2} \cos \varphi$, $y_1 = y_0 - \frac{l}{2} \sin \varphi$, $y_2 = y_0 + \frac{l}{2} \sin \varphi$ otrzymuje się

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{8} (m_1 + m_2) l^2 \dot{\varphi}^2.$$

²Dla wykazania, że równanie więzów geometrycznych jest w takim przypadku tożsamością należy najpierw określić współrzędne zależne poprzez współrzędne uogólnione (niezależne): $x_1 = x_0 - \frac{l}{2} \cos \varphi$, $x_2 = x_0 + \frac{l}{2} \cos \varphi$, $y_1 = y_0 - \frac{l}{2} \sin \varphi$, $y_2 = y_0 + \frac{l}{2} \sin \varphi$. Po podstawieniu tych wyrażeń do równania więzów $(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - l^2 = 0$ otrzymuje się tożsamość.



Rysunek 5.2: Łyżwa – współrzędne uogólnione i obciążenie

Siły uogólnione dla rozpatrywanego układu można wyznaczyć porównując wyrażenia na pracę przygotowaną sił uogólnionych ($\delta L = Q_x \delta x_0 + Q_y \delta y_0 + Q_\varphi \delta \varphi$) i sił zewnętrznych:

$$\delta L = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 dt = (F \dot{x}_2 \cos \beta + F \dot{y}_2 \sin \beta) dt ,$$

gdzie $\dot{x}_2 = \dot{x}_0 - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi$, $\dot{y}_2 = \dot{y}_0 + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi$, a zatem

$$\delta L = \left(F \cos \beta (\dot{x}_0 - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi) + F \sin \beta (\dot{y}_0 + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi) \right) dt .$$

Podstawiając $x'_0 dt = \delta x_0$, $y'_0 dt = \delta y_0$, $\varphi' dt = \delta \varphi$, otrzymuje się

$$\delta L = F \cos \beta (\delta x_0 - \frac{l}{2} \delta \varphi \sin \varphi) + F \sin \beta (\delta y_0 + \frac{l}{2} \delta \varphi \cos \varphi) .$$

Po uporządkowaniu

$$\delta L = F \cos \beta \delta x_0 + F \frac{l}{2} (\sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi) \delta \varphi + F \sin \beta \delta y_0 ,$$

co oznacza, że siły uogólnione są odpowiednio równe:

$$Q_x = F \cos \beta , \quad Q_\varphi = F \frac{l}{2} (\sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi) = F \frac{l}{2} \sin(\beta - \varphi) , \\ Q_y = F \sin \beta .$$

Układ równań Lagrange'a II-go rodzaju (5.11) z mnożnikami μ_s ($s = 1$) ma – dla rozpatrywanego układu – następującą formę:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial T}{\partial x_0} = Q_x + \mu_1 \alpha_{11},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_0} - \frac{\partial T}{\partial y_0} = Q_y + \mu_1 \alpha_{12},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_0} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_0} = Q_\varphi + \mu_1 \alpha_{13},$$

stąd, po podstawieniu wyznaczonych już wielkości (T , Q_x , Q_y , Q_φ , α_{11} , α_{12} , α_{13}), otrzymuje się układ $n = 3$ równań o postaci:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_0 = F \cos \beta + \mu_1 \sin \varphi,$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_0 = F \sin \beta - \mu_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{1}{4}(m_1 + m_2)l^2\ddot{\varphi} = F \frac{l}{2} \sin(\beta - \varphi)$$

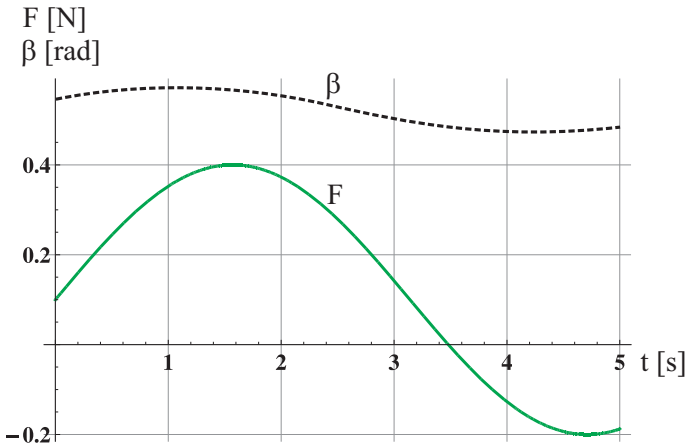
oraz jedno ($r = 1$) równanie więzów kinematycznych

$$\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi = 0.$$

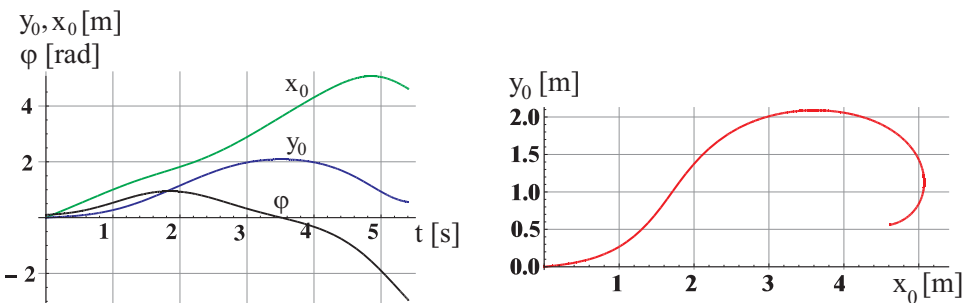
Przy numerycznym rozwiązywaniu zadania równanie więzów kinematycznych zostało przedstawione w formie równania drugiego rzędu (to jest jako $\dot{x}_0 \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_0 \dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{x}_0 \sin \varphi - \ddot{y}_0 \cos \varphi = 0$).

Rezultaty rozwiązania numerycznego są przedstawione na rys. 5.3–5.4.

Obliczenia zostały przeprowadzone dla następujących danych: $l = 0,1$ m, $m_1 = 1$, kg, $m_2 = 1$ kg, $F = 0,1 + 0,3 \sin(t)$ [N], $\beta = \pi/6 + \pi/60 \sin(t + 0,5)$ [rad], $x_0(0) = 0$, $y_0(0) = 0$, $\varphi(0) = 0,1$ rad, $\dot{\varphi}(0) = 0,1$ rad/s, $\dot{y}_0(0) = 0,1$ m/s, $\dot{x}_0(0) = \cos\varphi(0)/\sin\varphi(0) \dot{y}_0(0)$.

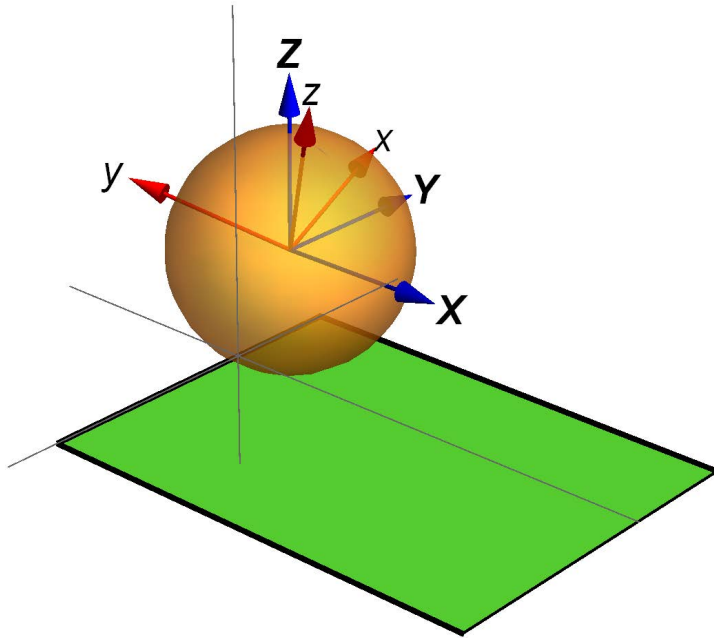


Rysunek 5.3: Zadane zmiany obciążenia w czasie: siła F (linia ciągła – kolor zielony), kąt β ((linia przerywana – kolor brązowy)



Rysunek 5.4: Przebiegi czasowe rozwiązań: x_0 – (kolor zielony), y_0 – (kolor niebieski), φ – (kolor czarny) i tor środka łyżwy (punktu O)

Przykład 5.1.93. Jednorodna kula o masie $m = 1$ kg, promieniu $r = 1$ m (i momencie bezwładności $J = \frac{2}{5}mr^2$) toczy się bez poślizgu po poziomej nieruchomej płaszczyźnie (rys. 5.5). Napisać równania więzów oraz równania ruchu kuli przy założeniu, że na kulę działają jedynie siły reakcji (ruch bezwładny).



Rysunek 5.5: Model kuli – osie: xyz sztywno związane z kulą i XYZ związane ze środkiem kuli, ale poruszające się ruchem postępowym

Wprowadzając współrzędne uogólnione: $x(t)$, $y(t)$ – określające położenie środka masy kuli oraz $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ – oznaczające kąty obrotu osi związanych z kulą (kąty Eulera), otrzymuje się:

$$q = \{x(t), y(t), \psi(t), \theta(t), \varphi(t)\},$$

$$\dot{q} = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\theta}(t), \dot{\varphi}(t)\}.$$

Prędkości kątowe kuli w zależności od współrzędnych (q) i prędkości uogólnionych (\dot{q}) określają wzory:

$$\omega_x = \dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) + \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)),$$

$$\begin{aligned}\omega_y &= \dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) - \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t)), \\ \omega_z &= \cos(\theta(t)) \dot{\varphi}(t) + \dot{\psi}(t).\end{aligned}$$

Warunek toczenia bez poślizgu nakłada na kulę następujące więzy:

$$\begin{aligned}g_1: \dot{y}(t) + \omega_x r &= \\ &= \dot{y}(t) + r \left(\dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) + \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)) \right) = 0, \\ g_2: \dot{x}(t) - \omega_y r &= \\ &= \dot{x}(t) - r \left(\dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) - \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t)) \right) = 0\end{aligned}$$

Zależność określająca energię kinetyczną kuli ma postać

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \left(m\dot{x}(t)^2 + m\dot{y}(t)^2 + J \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(m\dot{x}(t)^2 + m\dot{y}(t)^2 + J \left(\dot{\theta}(t)^2 + 2 \cos(\theta(t)) \dot{\varphi}(t) \dot{\psi}(t) + \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{\psi}(t)^2 \right) \right).\end{aligned}$$

Równania ruchu kuli można otrzymać wykorzystując równania Lagrange'a II-go rodzaju z mnożnikami:

$$\begin{aligned}L_x: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{\partial T}{\partial x(t)} + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial \dot{x}(t)} + \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial \dot{x}(t)} &= Q_x, \\ L_y: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}(t)} - \frac{\partial T}{\partial y(t)} + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial \dot{y}(t)} + \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial \dot{y}(t)} &= Q_y, \\ L_\psi: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}(t)} - \frac{\partial T}{\partial \psi(t)} + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial \dot{\psi}(t)} + \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial \dot{\psi}(t)} &= Q_\psi, \\ L_\theta: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}(t)} - \frac{\partial T}{\partial \theta(t)} + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial \dot{\theta}(t)} + \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial \dot{\theta}(t)} &= Q_\theta, \\ L_\varphi: \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}(t)} - \frac{\partial T}{\partial \varphi(t)} + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial \dot{\varphi}(t)} + \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial \dot{\varphi}(t)} &= Q_\varphi.\end{aligned}$$

Po wykonaniu operacji różniczkowania zgodnie z zależnościami podanymi powyżej (i podstawieniu, że wszystkie siły uogólnione $Q_i = 0$) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}m\ddot{x}(t) + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 &= 0, \\ m\ddot{y}(t) + \mu_1 + \mu_2 \cdot 0 &= 0,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}J \left(-2\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t))\dot{\varphi}(t) + 2 \cos(\theta(t))\ddot{\varphi}(t) + 2\ddot{\psi}(t) \right) + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 0 = 0,$$

$$J\ddot{\theta}(t) + J \sin(\theta(t))\dot{\varphi}(t)\dot{\psi}(t) + r\mu_1 \cos(\psi(t)) - r\mu_2 \sin(\psi(t)) = 0,$$

$$\frac{1}{2}J \left(-2\theta'(t) \sin(\theta(t))\dot{\psi}(t) + 2 \cos(\theta(t))\ddot{\psi}(t) + 2\ddot{\varphi}(t) \right) +$$

$$+ r\mu_1 \sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)) + r\mu_2 \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t)) = 0.$$

Pięć powyższych równań zawiera siedem niewiadomych (dwa mnożniki Lagrange'a i pięć współrzędnych uogólnionych wraz z ich pochodnymi względem czasu), dlatego należy do tego układu dołączyć dwa równania otrzymane po zróżniczkowaniu równań więzów ($\dot{g}_1 = 0$, $\dot{g}_2 = 0$):

$$-\ddot{y}(t) - \ddot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) + \dot{\theta}(t)(-\sin(\psi(t))) \left(\cos(\theta(t))\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t) \right) +$$

$$- \sin(\theta(t))\ddot{\varphi}(t) \sin(\psi(t)) - \sin(\theta(t))\dot{\varphi}(t)\dot{\psi}(t) \cos(\psi(t)) = 0,$$

$$-\ddot{x}(t) + \ddot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) + \dot{\theta}(t)(-\cos(\psi(t))) \left(\cos(\theta(t))\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t) \right) +$$

$$- \sin(\theta(t))\ddot{\varphi}(t) \cos(\psi(t)) + \sin(\theta(t))\dot{\varphi}(t)\dot{\psi}(t) \sin(\psi(t)) = 0.$$

Z wyprowadzonego układu siedmiu różniczkowych równań, stosunkowo łatwo jest wyeliminować mnożniki Lagrange'a i współrzędne $x(t)$ i $y(t)$:

$$J \left(\dot{\theta}(t)(-\sin(\theta(t)))\dot{\varphi}(t) + \cos(\theta(t))\ddot{\varphi}(t) + \ddot{\psi}(t) \right) = 0,$$

$$\left(J + mr^2 \right) \left(\ddot{\theta}(t) + \sin(\theta(t))\dot{\varphi}(t)\dot{\psi}(t) \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \left(2\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) \left(mr^2 \cos(\theta(t))\dot{\varphi}(t) - \left(J + mr^2 \right) \dot{\psi}(t) \right) +$$

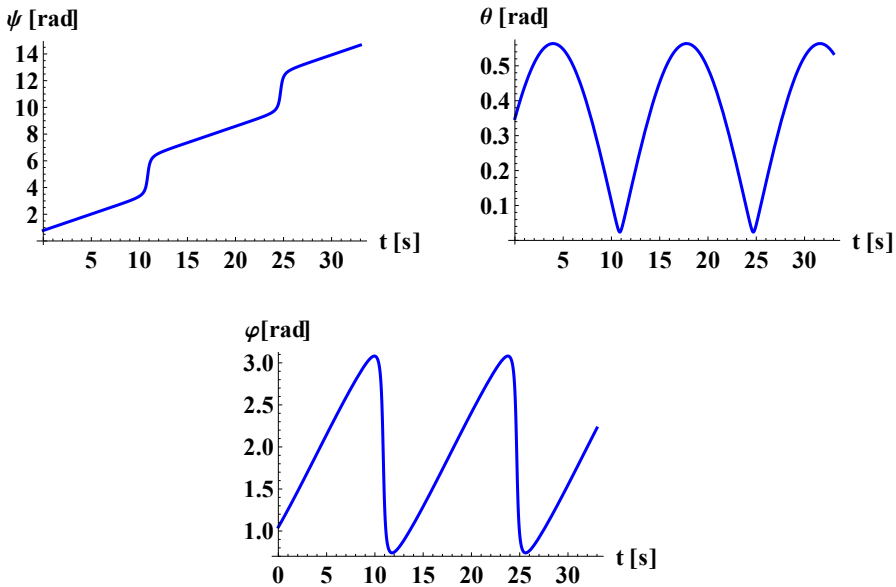
$$+ \ddot{\varphi}(t) \left(2J - mr^2 \cos(2\theta(t)) + mr^2 \right) + 2J \cos(\theta(t))\ddot{\psi}(t) \right) = 0.$$

Rozwiązanie układu nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu wyznaczone zostało numerycznie dla przyjętych danych oraz założonych warunków początkowych.

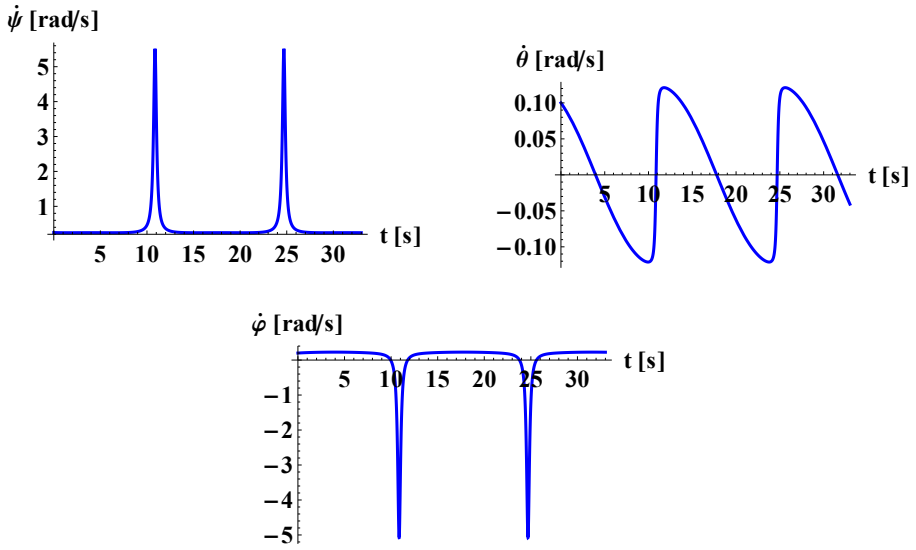
Przebiegi zmian współrzędnych $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ otrzymane z rozwiązania numerycznego dla danych przedstawionych w tabelicy 5.1 są pokazane na rys. 5.6, a prędkości uogólnionych $\dot{\psi}(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ na rys. 5.7.

Tablica 5.1: Dane modelu, wartości początkowe współrzędnych i prędkości uogólnionych

	Nazwa	Oznaczenie	Wartość	Jednostki
1	Masa kuli	m	1	kg
2	Promień	r	1	m
3	Moment bezwładności	J	$\frac{2}{5}$	kgm^2
4	Współrzędna uogólniona	$\psi(0)$	π	rad
5	Prędkość uogólniona	$\dot{\psi}(0)$	0,25	$\frac{rad}{s}$
6	Współrzędna uogólniona	$\theta(0)$	$\frac{\pi}{9}$	rad
7	Prędkość uogólniona	$\dot{\theta}(0)$	0,1	$\frac{rad}{s}$
8	Współrzędna uogólniona	$\varphi(0)$	$\frac{\pi}{3}$	rad
9	Prędkość uogólniona	$\dot{\varphi}(0)$	0,2	$\frac{rad}{s}$



Rysunek 5.6: Przebieg zmian współrzędnych ψ , θ i φ dla danych z tablicy 5.1



Rysunek 5.7: Przebieg zmian prędkości uogólnionych $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ i $\dot{\varphi}$ dla danych z tabelicy 5.1

5.1.2 Metoda eliminacji zależnych przemieszczeń przygotowanych z równania d'Alemberta – Lagrange'a

Równanie d'Alemberta – Lagrange'a (5.1), to znaczy równanie o postaci

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \quad (5.13)$$

w przypadku, gdy r uogólnionych przemieszczeń przygotowanych jest zależna od pozostałych $(n-r)$ – niezależnych przemieszczeń przygotowanych, można przedstawić w formie

$$\sum_{i=1}^{n-r} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i + \sum_{j=n-r+1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (5.14)$$

Zależne uogólnione przemieszczenia przygotowane mogą być zapisane jako (5.4)

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{n-r} \beta_{ji} \delta q_i, \quad (j = n-r+1, \dots, n). \quad (5.15)$$

W ten sposób dochodzi się do równania

$$\sum_{i=1}^{n-r} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i + \sum_{j=n-r+1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \sum_{i=1}^{n-r} \beta_{ji} \delta q_i = 0, \quad (5.16)$$

które może być zapisane w formie

$$\sum_{i=1}^{n-r} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) + \sum_{j=n-r+1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \beta_{ji} \right] \delta q_i = 0. \quad (5.17)$$

W równaniu (5.17) wszystkie występujące uogólnione przemieszczenia przygotowane (δq_i dla $i = 1, \dots, n-r$) są niezależne. Równanie (5.17) będzie spełnione, jeśli wszystkie współczynniki stojące przy uogólnionych przemieszczeniach przygotowanych δq_i będą równe zero, a to znaczy, że spełniony

musi być układ $n - r$ równań o postaci

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) + \sum_{j=n-r+1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \beta_{ji} = 0, \quad i = 1, \dots, n - r. \quad (5.18)$$

Rozwiązanie tych równań będzie możliwe, jeśli uwzględnimy układ r równań więzów kinematycznych (5.2)

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{sk} \dot{q}_k + \alpha_{s0} = 0, \quad (s = 1, \dots, r) \quad (5.19)$$

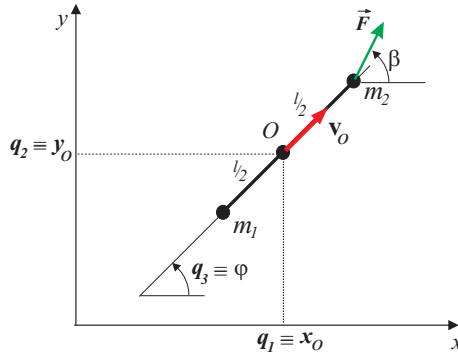
i wykorzystując zależności pomiędzy uogólnionymi przemieszczeniami przygotowanymi δq_k

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{sk} \delta q_k = 0, \quad (s = 1, \dots, r). \quad (5.20)$$

Wyznamy z nich współczynniki β_{ji} , które są konieczne do przedstawienia zależnych przemieszczeń przygotowanych w zależności od niezależnych uogólnionych przemieszczeń przygotowanych. W ten sposób układ $n - r$ równań (5.18) będzie uzupełniony układem r równań otrzymanych z rozwiązania układu (5.20).

Przykład 5.1.94. Zbadać ruch układu dwóch punktów materialnych P_1 i P_2 o masach m_1 oraz m_2 , połączonych lekkim, sztywnym prętem o długości l i poruszających się po poziomej, gładkiej płaszczyźnie xy pod działaniem zadanej siły \vec{F} (przyłożonej w punkcie P_2). Na ruch układu nałożony jest warunek, by wektor prędkości środka pręta miał zawsze kierunek pręta (rys. 5.1). Ponadto zadane są: położenie i prędkość początkowa układu.

Przedstawiony tu przykład został rozwiązany na s. 180 przy użyciu n równań Lagrange'a II-go rodzaju z mnożnikami (5.11), (5.12). W poniżej prezentowanej wersji rozwiązania wykorzystywane są równania (5.18), to znaczy równania Lagrange'a II-go rodzaju dla układów nieholonomicznych w liczbie $n - r$, otrzymane poprzez eliminację zależnych przemieszczeń przygotowanych z równania d'Alemberta – Lagrange'a.



Rysunek 5.8: Łyżwa – współrzędne uogólnione i siła zewnętrzna $F(t)$

Liczba stopni swobody rozpatrywanego układu $n_s = 2 \cdot 2 - 1 - 1 = 2$ (jest równa liczbie niezależnych przemieszczeń przygotowanych), natomiast liczba niezależnych współrzędnych $n = n_s + r = 2 + 1 = 3$ (jest większa od liczby stopni swobody o r , to jest o liczbę równań więzów kinematycznych). Inaczej mówiąc, liczba stopni swobody rozpatrywanego układu nieholonomicznego $n_s = n - r = 3 - 1 = 2$.

Wprowadzając niezależne współrzędne uogólnione, takie że $q_1 \equiv x_0$, $q_2 \equiv y_0$, $q_3 \equiv \varphi$ (rys. 5.8), można przedstawić równanie więzów kinematycznych w postaci

$$\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{albo} \quad g_s = \dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi = 0, \quad (s = 1),$$

W analizowanym przykładzie dwa, spośród trzech uogólnionych przemieszczeń przygotowanych, są niezależne, a jedno zależne. Wybierając δx_0 i $\delta \varphi$ jako niezależne, a δy_0 jako zależne, mamy związek

$$\delta y_0 = \delta x_0 \operatorname{tg} \varphi.$$

Zależne uogólnione przemieszczenia przygotowane – zgodnie z (5.15) – mogą być zapisane jako

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{n-r} \beta_{ji} \delta q_i, \quad (j = n - r + 1, \dots, n),$$

co w tym zadaniu oznacza, że

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^2 \beta_{ji} \delta q_i, \quad (j = 3, \dots, 3),$$

a zatem

$$\delta q_3 = \beta_{31}\delta q_1 + \beta_{32}\delta q_2,$$

lub (dla oznaczeń $\delta q_1 \equiv \delta x_0$, $\delta q_2 \equiv \delta \varphi$, $\delta q_3 \equiv \delta y_0$)

$$\delta y_0 = \beta_{31}\delta x_0 + \beta_{32}\delta \varphi.$$

Porównując powyższe zależności z równaniem otrzymanym na podstawie równania więzów kinematycznych nałożonych na układ, to jest

$$\delta y_0 = \delta x_0 \operatorname{tg} \varphi,$$

można określić współczynniki β_{31} i β_{32} jako

$$\beta_{31} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \beta_{32} = 0.$$

Układ równań Lagrange'a II-go rodzaju (5.18) – otrzymany po eliminacji zależnych przemieszczeń przygotowanych z równania d'Alemberta – Lagrange'a – ma następującą budowę (dla $n = 3$, $r = 1$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial T}{\partial x_0} - Q_x + \sum_{j=3}^3 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_0} - \frac{\partial T}{\partial y_0} - Q_y \right) \beta_{31} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_0} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_0} - Q_\varphi + \sum_{j=3}^3 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_0} - \frac{\partial T}{\partial y_0} - Q_y \right) \beta_{32} = 0.$$

Energia kinetyczna analizowanego układu jest określona jako

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{8}(m_1 + m_2)l^2\dot{\varphi}^2,$$

natomiast siły uogólnione są odpowiednio równe:

$$\begin{aligned} Q_x &= F \cos \beta, & Q_y &= F \sin \beta, \\ Q_\varphi &= F \frac{l}{2} (\sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi) = F \frac{l}{2} \sin(\beta - \varphi). \end{aligned}$$

Po podstawieniu wyznaczonych już wielkości (T , Q_x , Q_y , Q_φ , β_{31} , β_{32}) otrzymuje się układ dwóch równań ($n - r = 3 - 1 = 2$) o postaci:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_0 - F \cos \beta + ((m_1 + m_2)\ddot{y}_0 - F \sin \beta) \operatorname{tg} \beta = 0,$$

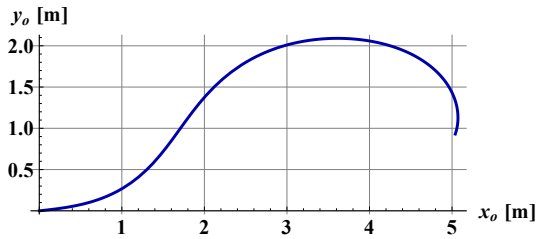
$$\frac{1}{4}(m_1 + m_2)l^2\ddot{\varphi} - F\frac{l}{2}\sin(\beta - \varphi) = 0,$$

oraz jedno ($r = 1$) równanie więzów kinematycznych

$$\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi = 0,$$

które może być przedstawione w formie równania drugiego rzędu (to znaczy $\dot{x}_0 \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_0 \dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{x}_0 \sin \varphi - \ddot{y}_0 \cos \varphi = 0$).

Wyniki rozwiązania numerycznego są przedstawione na rys. 5.9. Obliczenia zostały przeprowadzone dla danych: $l = 0,1$ m, $m_1 = 1$, kg, $m_2 = 1$ kg, $F = 0,1 + 0,3 \sin(t)$ [N], $\beta = \pi/6 + \pi/60 \sin(t + 0,5)$ [rad], $x_0(0) = 0$, $y_0(0) = 0$, $\varphi(0) = 0,1$ rad, $\dot{\varphi}(0) = 0,1$ rad/s, $\dot{y}_0(0) = 0,1$ m/s, $\dot{x}_0(0) = \cos \varphi(0) / \sin \varphi(0) \dot{y}_0(0)$.



Rysunek 5.9: Tor środka łyżwy (punktu O)

Otrzymany tor środka masy jest taki sam jak wyznaczony w zadaniu rozwiązywanym przy użyciu równań Lagrange'a z mnożnikami (rys. 5.4).

5.2 Równania Maggi'ego dla układów nieholonomicznych

Liczba stopni swobody układu nieholonomicznego $n_s = n - r$ (jest równa liczbie niezależnych przemieszczeń przygotowanych), przy czym n oznacza liczbę niezależnych współrzędnych koniecznych do opisanie ruchu takiego układu, natomiast r jest liczbą niecałkowalnych równań więzów kinematycznych.

Wprowadzając tak zwane charakterystyki (parametry) kinematyczne \dot{e}_k , w ilości równej liczbie stopni swobody n_s , można wyrazić wszystkie prędkości uogólnione (\dot{q}_n) poprzez te parametry:

$$\dot{q}_k = \sum_{i=1}^l c_{ik} \dot{e}_i + g_k, \quad l = n - r = n_s, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5.21)$$

a przemieszczenia przygotowane jako:

$$\delta q_k = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{e}_i} \delta e_i = \sum_{i=1}^l c_{ik} \delta e_i, \quad l = n - r = n_s, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.22)$$

Jeśli do równania d'Alemberta – Lagrange'a (5.6), to znaczy do równania o postaci

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \quad (5.23)$$

w miejsca δq_k podstawić (5.22)

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \sum_{i=1}^l c_{ik} \delta e_i = 0, \quad (5.24)$$

to otrzymuje się równanie

$$\sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \sum_{i=1}^l c_{ik} - \sum_{i=1}^l Q_k c_{ik} \right) \delta e_i = 0. \quad (5.25)$$

Ponieważ wariacje δe_i są dowolne i niezależne, to równanie (5.25) będzie spełnione w przypadku, gdy spełniony będzie układ l równań ($l = n_s$) – nazywanych równaniami Maggi'ego:

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) = \Phi_i, \quad (i = 1, \dots, l) \quad (5.26)$$

przy czym

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} Q_k, \quad (i = 1, \dots, l). \quad (5.27)$$

Siły uogólnione w zależności (5.27) są określone jako

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5.28)$$

lub – dla sił potencjalnych

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.29)$$

Równania Maggi'ego (5.26) wraz z zależnościami (5.27) i (5.21) umożliwiają opis ruchu układu nieholonomicznego we współrzędnych uogólnionych.

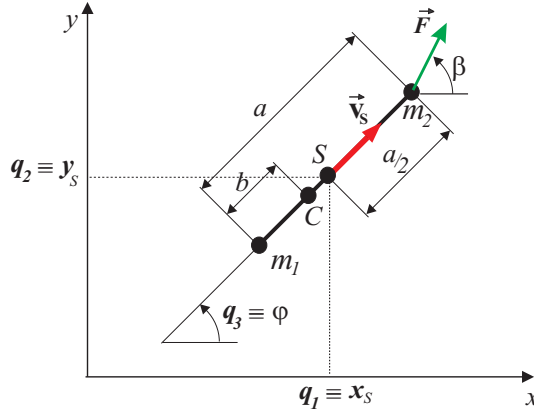
Przykład 5.2.95. Używając równań Maggi'ego, zbadać ruch układu złożonego z dwóch punktów materialnych o masach m_1 oraz m_2 , połączonych lekkim, sztywnym prętem o długości a i poruszających się po poziomej, gładkiej płaszczyźnie xy . Ciało obciążone jest zmieniającą się w czasie siłą o wartości $F(t)$ działającą pod kątem $\beta(t)$ do poziomu (rys. 5.10). Ponadto będziemy żądać, by wektor prędkości środka pręta (\vec{v}_S) miał zawsze kierunek pręta. Dodatkowo zadane są: położenie i prędkość początkowa układu.

Jeśli do opisu ruchu układu (rys. 5.10) zostaną użyte współrzędne uogólnione³ $q_1 = x_S$, $q_2 = y_S$, $q_3 = \varphi$ (gdzie S jest punktem leżącym w połowie długości pręta), to konieczne będzie określenie jedynie równań więzów kinematycznych.

Ograniczeniem nałożonym na ruch badanego układu jest narzucony kierunek prędkości środka pręta (punktu S). Równanie więzów kinematycznych we współrzędnych uogólnionych przyjmuje dla obranych współrzędnych postać

$$\frac{\dot{y}_S}{\dot{x}_S} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{albo} \quad \dot{x}_S \sin \varphi - \dot{y}_S \cos \varphi = 0, \quad (s = 1).$$

³Współrzędne uogólnione opisujące położenie układu są funkcjami czasu: $q_1 = x_S(t)$, $q_2 = y_S(t)$, $q_3 = \varphi(t)$, ale dla przejrzystości wzorów w wielu zależnościach przyjęty jest uproszczony zapis: $q_1 = x_S$, $q_2 = y_S$, $q_3 = \varphi$ (gdzie: $x_S \equiv x_S(t)$, $y_S \equiv y_S(t)$, $\varphi \equiv \varphi(t)$). Równania generowane przy użyciu komputera zawierają zmienne wraz z parametrem " t ".



Rysunek 5.10: Łyżwa: \vec{v}_s – wektor prędkości środka geometrycznego łyżwy (punktu S), współrzędne uogólnione ($q_1 = x_s$, $q_2 = y_s$, $q_3 = \varphi$) i środek masy łyżwy (C)

Liczba wprowadzonych parametrów kinematycznych jest równa liczbie niezależnych uogólnionych przemieszczeń przygotowanych – w tym przypadku $l = n - r = 3 - 1 = 2$.

Zgodnie z postępowaniem przyjętym dla równań Maggi'ego wprowadzamy parametry kinematyczne (charakterystyki) \dot{e}_1 i \dot{e}_2 w formie:

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_s, \quad \dot{e}_2 = \dot{\varphi}.$$

Prędkości uogólnione wyrażone poprzez wprowadzone charakterystyki \dot{e}_1 i \dot{e}_2 mają postać:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &\equiv \dot{x}_s = \dot{e}_1, \\ \dot{q}_2 &\equiv \dot{y}_s = \dot{e}_1 \operatorname{tg} \varphi, \\ \dot{q}_3 &\equiv \dot{\varphi} = \dot{e}_2, \end{aligned}$$

co oznacza, że współczynniki c_{11} , ... c_{23} oraz g_1 , ... g_3 występujące we wzorze (5.21) są odpowiednio równe:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1, & c_{21} &= 0, & g_1 &= 0, & (\dot{q}_1 &= c_{11}\dot{e}_1 + c_{21}\dot{e}_2 + g_1), \\ c_{12} &= \operatorname{tg} \varphi, & c_{22} &= 0, & g_2 &= 0, & (\dot{q}_2 &= c_{12}\dot{e}_1 + c_{22}\dot{e}_2 + g_2), \\ c_{13} &= 0, & c_{23} &= 1, & g_3 &= 0, & (\dot{q}_3 &= c_{13}\dot{e}_1 + c_{23}\dot{e}_2 + g_3). \end{aligned}$$

Równania Maggi'ego dla rozpatrywanego układu można przedstawić w postaci ogólnej jako:

$$c_{11} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + c_{12} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + c_{13} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) = \Phi_1,$$

$$c_{21} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + c_{22} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + c_{23} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) = \Phi_2,$$

a po podstawieniu wartości współczynników $c_{11} = 1, \dots, c_{23} = 1$ (i zmianie oznaczeń na $q_1 = x_s, q_2 = y_s, q_3 = \varphi$), równania Maggi'ego mają postać:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} - \frac{\partial T}{\partial x_s} \right) + \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_s} - \frac{\partial T}{\partial y_s} \right) = \Phi_1,$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \Phi_2.$$

Energia kinetyczna analizowanego układu jest określona jako

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2,$$

gdzie:

$$v_C^2 = x_C^2 + y_C^2 = \left(\dot{x}_s + \dot{\varphi} \left(\frac{a}{2} - b \right) \sin \varphi \right)^2 + \left(\dot{y}_s - \dot{\varphi} \left(\frac{a}{2} - b \right) \cos \varphi \right)^2,$$

$$J_C = m_1 b^2 + m_2 (a - b)^2.$$

Siły uogólnione można wyznaczyć porównując wyrażenia na pracę przygotowaną sił uogólnionych ($\delta L = Q_x \delta x_s + Q_y \delta y_s + Q_\varphi \delta \varphi$) i sił zewnętrznych:

$$\delta L = F_x \delta x_2 + F_y \delta y_2 = F \cos \beta \delta x_2 + F \sin \beta \delta y_2,$$

przy czym współrzędne określające położenie punktu o masie m_2 są równe: $x_2 = x_s + (a - b) \cos \varphi$, $y_2 = y_s + (a - b) \sin \varphi$, a odpowiadające im przemieszczenia przygotowane $\delta x_2 = \delta x_s - ((a - b) \sin \varphi) \delta \varphi$, $\delta y_2 = \delta y_s + ((a - b) \cos \varphi) \delta \varphi$. Zatem

$$\delta L = F \cos \beta \delta x_s + F \sin \beta \delta y_s + (F \sin \beta (a - b) \cos \varphi - F \cos \beta (a - b) \sin \varphi) \delta \varphi$$

lub

$$\delta L = F \cos \beta \delta x_s + F \sin \beta \delta y_s + F(a - b) \sin(\beta - \varphi) \delta \varphi$$

Siły uogólnione Q_x, Q_y, Q_φ – odpowiadające współrzędnym uogólnionym – są więc odpowiednio równe:

$$Q_x = F \cos \beta, \quad Q_y = F \sin \beta, \quad Q_\varphi = F(a - b) \sin(\beta - \varphi),$$

natomiast uogólnione Φ_1, Φ_2 występujące po prawych stronach w równaniach Maggi'ego (odpowiadające parametrom kinematycznym \dot{e}_1, \dot{e}_2) mają formę (5.27):

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{k=1}^n c_{ik} Q_k = c_{11} Q_x + c_{12} Q_y + c_{13} Q_\varphi = Q_x + Q_y \operatorname{tg} \varphi = \\ &= F \cos \beta + F \sin \beta \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^n c_{ik} Q_k = c_{21} Q_x + c_{22} Q_y + c_{23} Q_\varphi = Q_\varphi = F(a - b) \sin(\beta - \varphi).$$

Po podstawieniu wyznaczonych wielkości do równań Maggi'ego dla rozpatrywanego tu układu i zróżniczkowaniu energii kinetycznej względem prędkości uogólnionych i współrzędnych uogólnionych otrzymuje się równania dynamiki analizowanego modelu łyżwy w formie dwu równań różniczkowych o postaci:

$$\begin{aligned} &m_1(\ddot{x}_s(t) + \dot{y}_s(t) \operatorname{tg} \varphi(t) + \frac{1}{2} a \dot{\varphi}(t)^2 \sec \varphi(t)) + \\ &+ m_2(\ddot{x}_s(t) + \dot{y}_s(t) \operatorname{tg} \varphi(t) - \frac{1}{2} a \dot{\varphi}(t)^2 \sec \varphi(t)) = \\ &= F(t)(\cos \beta(t) + \sin \beta(t) \operatorname{tg} \varphi(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4(m_1+m_2)} (2m_1 (2Jc - a^2 m_2) \ddot{\varphi}(t) + m_2 (am_2 (a\ddot{\varphi}(t) - 2 \sin(\varphi(t)) \ddot{x}_s(t) + \\ &+ 2 \cos(\varphi(t)) \dot{y}_s(t)) + 4Jc\ddot{\varphi}(t)) + am_1^2 (a\ddot{\varphi}(t) + 2 \sin(\varphi(t)) \ddot{x}_s(t) + \\ &- 2 \cos(\varphi(t)) \dot{y}_s(t))) = \frac{m_1 a}{(m_1+m_2)} F(t) \sin(\beta(t) - \varphi(t)), \end{aligned}$$

(gdzie $\sec \varphi(t) = \frac{1}{\cos \varphi(t)}$).

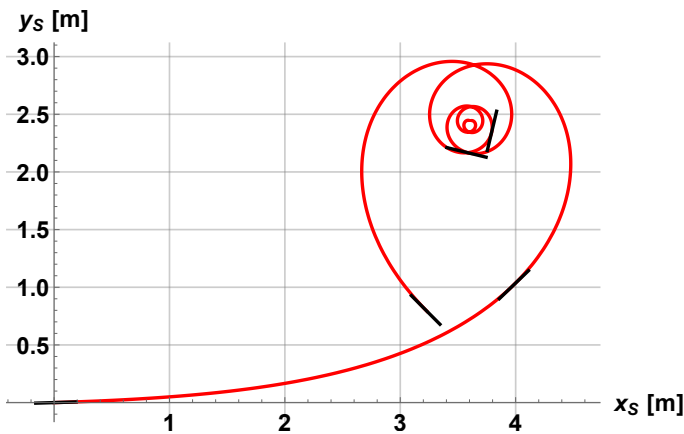
Otrzymane równania są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu względem współrzędnych uogólnionych $(x_s(t), y_s(t), \varphi(t))$. Do wyznaczenia trzech niewiadomych funkcji konieczne jest użycie równania więzów kinematycznych – określającego zależność pomiędzy prędkościami uogólnionymi, to jest równania o postaci:

$$\dot{x}_s \sin \varphi - \dot{y}_s \cos \varphi = 0 ,$$

$$(\text{lub } \ddot{x}_s \sin \varphi + \dot{x}_s \dot{\varphi} \cos \varphi - \ddot{y}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \dot{\varphi} \sin \varphi = 0) .$$

Wyniki rozwiązania numerycznego podanego układu trzech równań różniczkowych są przedstawione na rys. 5.11.

Obliczenia zostały przeprowadzone dla następujących danych: $m_1 = 30 \text{ kg}$, $m_2 = 25 \text{ kg}$, $a = 0,35 \text{ m}$, $b \cong 0,1591 \text{ m}$, $\beta(t) = \pi/6 + (\pi \sin(0,5 + t))/6 \text{ rad}$, $F(t) = 10 \cdot (0,1 + 0,3 \sin(t)) \text{ N}$ oraz warunków początkowych: $x_s(0) = 0$, $y_s(0) = 0$, $\varphi(0) = 0,03 \text{ rad}$, $\dot{x}_s(0) \cong 3,332 \text{ m/s}$, $\dot{y}_s(0) = 0,1 \text{ m/s}$, $\dot{\varphi}(0) = 0,03 \text{ rad/s}$.



Rysunek 5.11: Wyniki rozwiązania: tor środka pręta (punktu S) oraz położenia pręta w wybranych chwilach

5.3 Równania Boltzmann-Hamela

Równania Boltzmann-Hamela są stosowane niechętnie i rzadko. Przyczyną są skomplikowane wzory zawierające trójwskaźnikowe symbole Hamela (γ_{nj}^i) oraz złożone zależności służące do określenia tych symboli [4].

Klasyczna postać równań Boltzmann-Hamela jest następująca [12, 17]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial w_n} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_n} + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=k} \gamma_{nj}^i \frac{\partial T^*}{\partial w_i} w_j = \Pi_n, \quad (n = 1, \dots, k), \quad (5.30)$$

przy czym

$$\gamma_{nj}^i = \sum_{m=1}^{m=k} \sum_{l=1}^{l=k} b_{ln} b_{mj} \left(\frac{\partial a_{im}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial q_m} \right), \quad (5.31)$$

są symbolami Hamela, a ich liczba (l_γ) jest równa $l_\gamma = \frac{k^2(k-1)}{2}$, natomiast T^* jest energią kinetyczną układu wyrażoną poprzez quasi-prędkości i współrzędne uogólnione ($T(\dot{q}_n, q_n, t) = T^*(w_n, q_n, t)$), Π_n oznacza obciążenia odpowiadające quasi-współrzędnym (π_n). Współczynniki a_{ij} i b_{ij} są zdefiniowane poprzez związki pomiędzy quasi-prędkościami (w_n) a prędkościami uogólnionymi (\dot{q}_n):

$$w_n = \sum_{j=1}^{j=k} a_{nj} \dot{q}_j, \quad \dot{q}_n = \sum_{j=1}^{j=k} b_{nj} w_j, \quad (n = 1, \dots, k). \quad (5.32)$$

Całkując prędkości uogólnione, otrzymuje się współrzędne uogólnione ($q_n = \int \dot{q}_n dt$). W odróżnieniu od prędkości uogólnionych, które są pochodnymi współrzędnych uogólnionych quasi-prędkości nie dają się przedstawić jako pochodne współrzędnych. To znaczy, że nie istnieją w postaci jawnej funkcje π_n spełniające zależność $\pi_n = \int w_n dt$.

Coraz szersze możliwości wykonywania operacji symbolicznych przy użyciu komputera (pozwalają na to np. systemy *DERIVE*, *Mathematica*, *Mathcad*, *Maxima* i inne) powodują, że trudności związane z wyznaczeniem współczynników γ_{nj}^i mogą być pokonane. Macierzowy zapis zależności określających te współczynniki pozwala na prosty algorytm generowania trójwskaźnikowych symboli Hamela.

5.3.1 Równania Boltzmann-Hamela w opisie ruchu kulistego

Równania Boltzmann-Hamela dobrze nadają się do opisu ruchu kulistego (i ruchu ogólnego ciała sztywnego) przy użyciu quasi-prędkości.

Jeśli położenie ciała jest opisane przy użyciu kątów Eulera, a więc współrzędnymi uogólnionymi są kąty ψ , ϑ , φ , to rzuty wektora prędkości kątowej ciała na osie ruchomego układu ($O\xi\eta\zeta$) są odpowiednio równe:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta,\end{aligned}\tag{5.33}$$

a więc ω_ξ , ω_η , ω_ζ są quasi-prędkościami (a nie prędkościami uogólnionymi).

Dla ciała sztywnego o unieruchomionym punkcie O (to jest ciała poruszającego się ruchem kulistym) wyrażenie na energię kinetyczną (B.7) ma postać

$$\begin{aligned}T^* &= \frac{1}{2}(J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2 + \\ &\quad - 2J_{\xi\eta} \omega_\xi \omega_\eta - 2J_{\eta\zeta} \omega_\eta \omega_\zeta - 2J_{\zeta\xi} \omega_\zeta \omega_\xi),\end{aligned}\tag{5.34}$$

a zatem energia jest określona poprzez quasi-prędkości. Osie układu związanego z ciałem ($\xi\eta\zeta$) mają w tym przypadku początek w punkcie O , a jeśli są to osie główne, wówczas $J_{\xi\eta} = 0$, $J_{\eta\zeta} = 0$, $J_{\zeta\xi} = 0$ i energia jest określona jako (B.8)

$$T^* = \frac{1}{2}(J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2).\tag{5.35}$$

Symbol T^* został tu użyty dla zaznaczenia, że wzory (5.34)–(5.35) przedstawiają energię kinetyczną ciała w zależności od quasi-prędkości (ω_ξ , ω_η , ω_ζ).

Przykład 5.3.96. Na podstawie równań Boltzmann-Hamela wyprowadzić równania ruchu dla osiowosymetrycznego ciała o unieruchomionym jednym punkcie (to znaczy równania Eulera dla ciała poruszającego się ruchem kulistym).

Jeśli quasi-prędkości mają formę określoną jak we wzorze (5.33), przy czym $w_1 = \omega_\xi$, $w_2 = \omega_\eta$, $w_3 = \omega_\zeta$, to współczynniki a_{nj} i b_{nj} ($n = j = 3$),

występujące we wzorach (5.32) są równe:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin \vartheta \sin \varphi, & a_{12} &= \cos \varphi, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= \cos \varphi \sin \vartheta, & a_{22} &= -\sin \varphi, & a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= \cos \vartheta, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 1, \end{aligned} \quad (5.36)$$

oraz

$$\begin{aligned} b_{11} &= \csc \vartheta \sin \varphi, & b_{12} &= \cos \varphi \csc \vartheta, & b_{13} &= 0, \\ b_{21} &= \cos \varphi, & b_{22} &= -\sin \varphi, & b_{23} &= 0, \\ b_{31} &= -\operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi, & b_{32} &= -\cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta, & b_{33} &= 1, \end{aligned} \quad (5.37)$$

(gdzie $\csc \vartheta = \frac{1}{\sin \vartheta}$).

Wykorzystując równania (B.8), (5.30), (5.31) i oznaczając siły uogólnione $\Pi_1 = M_\xi$, $\Pi_2 = M_\eta$, $\Pi_3 = M_\zeta$, otrzymuje się równania opisujące dynamikę ciała sztywnego w ruchu kulistym:

$$\begin{aligned} J_\xi \dot{\omega}_\xi - (J_\eta - J_\zeta) \omega_\zeta \omega_\eta &= M_\xi, \\ J_\eta \dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J_\xi) \omega_\zeta \omega_\xi &= M_\eta, \\ J_\zeta \dot{\omega}_\zeta - (J_\xi - J_\eta) \omega_\xi \omega_\eta &= M_\zeta. \end{aligned} \quad (5.38)$$

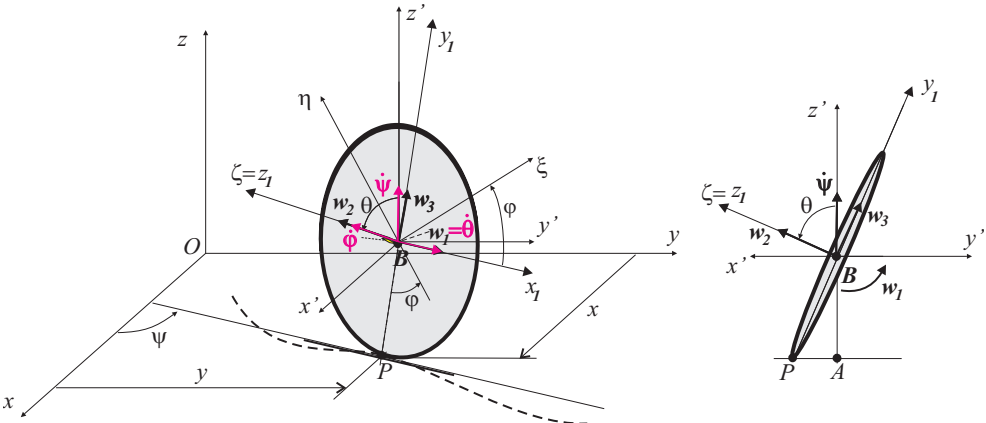
Równania (5.38) są identyczne z równaniami Eulera służącymi do opisu ruchu kulistego (i ogólnego ciała sztywnego), przy użyciu quasi-prędkości, znanymi z mechaniki newtonowskiej.

Przykład 5.3.97. Zbadać ruch krążka o ostrej krawędzi toczącego się po poziomej płaszczyźnie (rys. 5.12). Zadane jest położenie i prędkość początkowa ciała.

Do utworzenia równań opisujących dynamikę krążka zostały użyte równania Boltzmann-Hamela (5.30) oraz związki (5.31)–(5.32). Jako quasi-prędkości zostały przyjęte następujące wielkości:

$$\begin{aligned} w_1 &= \omega_1 = \dot{\theta}, \\ w_2 &= \omega_2 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \\ w_3 &= \omega_3 = \dot{\psi} \sin \theta, \\ w_4 &= \dot{x} + a \dot{\varphi} \cos \psi, \\ w_5 &= \dot{y} + a \dot{\varphi} \sin \psi, \end{aligned}$$

przy czym a oznacza promień koła. Pierwsze trzy równania określają rzuty prędkości kątowej krążka na osie $x_1 y_1 z_1$ – związane z punktem B (środkiem



Rysunek 5.12: Krążek – współrzędne uogólnione \$(x, y, \psi, \theta, \varphi)\$ oraz quasi-prędkości \$(w_1, w_2, w_3)\$

krążka), przy czym osie \$x_1\$ i \$y_1\$ leżą w płaszczyźnie krążka (\$x_1\$ jest osią poziomą), a \$z_1\$ jest prostopadła do płaszczyzny środkowej krążka (rys. 5.12). Kolejne dwa równania są zależnościami przedstawiającymi prędkości liniowe punktu styku krążka z podłożem (punktu \$P\$). W przypadku, gdy krążek toczy się bez poślizgu po nieruchomej płaszczyźnie, punkt krążka stykający się z podłożem ma chwilową prędkość równą zero, a więc muszą być spełnione warunki: \$w_4 = 0, w_5 = 0\$, to znaczy:

$$\dot{x} + a\dot{\varphi} \cos \psi = 0, \quad \dot{y} + a\dot{\varphi} \sin \psi = 0.$$

Są to dwa równania więzów kinematycznych nałożonych na ruch krążka.

Energia kinetyczna krążka wyrażona poprzez quasi-prędkości ma formę

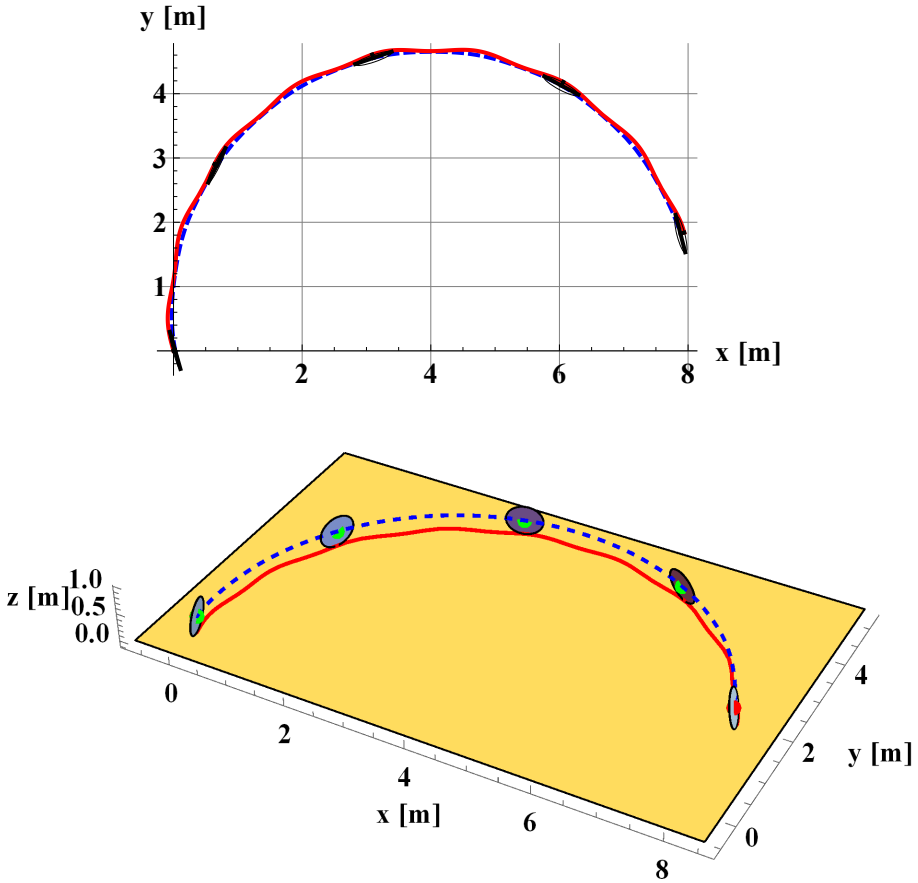
$$T^* = \frac{1}{2}m \left[a^2 w_1^2 \cos^2 \theta + (w_4 + a w_1 \sin \theta \sin \psi - a w_2 \cos \psi)^2 + (w_5 - a w_1 \sin \theta \cos \psi - a w_2 \sin \psi)^2 \right] + \frac{1}{2} (J_{x_1} w_1^2 + J_{y_1} w_3^2 + J_{z_1} w_2^2),$$

gdzie \$m\$ oznacza masę krążka, a \$J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}\$ są masowymi momentami bezwładności krążka względem osi \$x_1, y_1\$ oraz \$z_1\$ (\$J_{x_1} = \frac{ma^2}{4}, J_{y_1} = \frac{ma^2}{4}, J_{z_1} = \frac{ma^2}{2}\$).

Na podstawie równań (5.30)–(5.32) można otrzymać równania dynamiki rozpatrywanego tu krążka. Dla obciążenia grawitacyjnego krążka siły uogól-

nione odpowiadające poszczególnym quasi-prędkościom są równe zero, z wyjątkiem jednej ($\Pi_1 = -mga \cos \theta$). Równania zostały wygenerowane, a następnie rozwiązane numerycznie przy użyciu programu Mathematica.

Wyniki rozwiązania dla danych: $a = 0,3 \text{ m}$, $m = 5 \text{ kg}$, $J_{x_1} = 0,1125 \text{ kgm}^2$, $J_{y_1} = 0,1125 \text{ kgm}^2$, $J_{z_1} = 0,225 \text{ kgm}^2$ i warunków początkowych: $w_1(0) = 0,64 \text{ rad/s}$, $w_2(0) = -6 \text{ rad/s}$, $w_3(0) = 0$, $\theta(0) = 95^\circ$, $\varphi(0) = 60^\circ$, $\psi(0) = 105,9^\circ$ są przedstawione na rys. 5.13.



Rysunek 5.13: Krążek toczący się bez poślizgu po płaszczyźnie – ślad krążka (linia ciągła) i tor środka krążka (linia przerywana)

5.3.2 Zadania do rozwiązania – dynamika układów nieholonomicznych

Zadanie 98. Torus toczy się bez poślizgu po poziomej nieruchomej płaszczyźnie. Jego położenie opisane jest za pomocą następujących współrzędnych $q = \{x_C(t), y_C(t), z_C(t), \psi(t), \theta(t), \varphi(t)\}$, gdzie $x_C(t), y_C(t), z_C(t)$ są współrzędnymi określającymi położenie środka masy, a $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$ są kątami Eulera. Współrzędne punktu styku torusa z płaszczyzną oznaczono przez $x(t), y(t)$. Określić liczbę stopni swobody (napisać wszystkie równania więzów) oraz równania ruchu torusa (przy założeniu, że działa siła ciężkości i siły reakcji). W tabeli zestawiono potrzebne do obliczeń dane.

Tablica 5.2: Dane modelu, wartości początkowe współrzędnych i prędkości uogólnionych

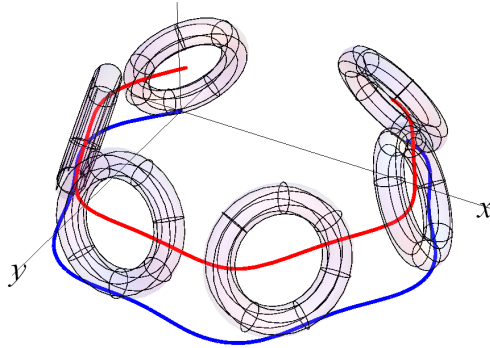
	Nazwa	Oznaczenie	Wartość	Jedn.
1	Przyspieszenie ziemskie	g	9,81	m/s^2
2	Promień duży torusa	a	0,6	m
3	Promień mały torusa	ρ	0,15	m
4	Masa torusa	m	5,6	kg
5	Moment bezwładności	$J_\eta = J_\xi$	0,970313	kgm^2
6	Moment bezwładności	J_ζ	1,88438	kgm^2
7	Współrzędna uogólniona	$\psi(0)$	0,924152	rad
5	Prędkość uogólniona	$\dot{\psi}(0)$	0,0	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
6	Współrzędna uogólniona	$\theta(0)$	0,349066	rad
7	Prędkość uogólniona	$\dot{\theta}(0)$	0,0	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
8	Współrzędna uogólniona	$\varphi(0)$	0,0	rad
9	Prędkość uogólniona	$\dot{\varphi}(0)$	-2,66667	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
10	Współrzędna uogólniona	$x(0)$	0,0	m
11	Współrzędna uogólniona	$y(0)$	0,0	m

Odpowiedź: Warunek toczenia bez poślizgu nakłada na ruch torusa następujące więzy nieholonomiczne:

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \sin(\psi(t))(a + \rho \cos(\theta(t))) + \\ & + \cos(\psi(t)) \left(\dot{\varphi}(t)(-(a + \rho \cos(\theta(t)))) - a \sin(\theta(t)) \dot{\psi}(t) \right) + \\ & + \dot{x}(t) + \rho \dot{\theta}(t) \sin^2(\theta(t)) \sin(\psi(t)) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \cos(\psi(t))(a + \rho \cos(\theta(t))) + \\
& + \sin(\psi(t)) \left(\dot{\varphi}(t)(-a + \rho \cos(\theta(t))) - a \sin(\theta(t)) \dot{\psi}(t) \right) + \\
& + \dot{y}(t) - \rho \dot{\theta}(t) \sin^2(\theta(t)) \cos(\psi(t)) = 0.
\end{aligned}$$

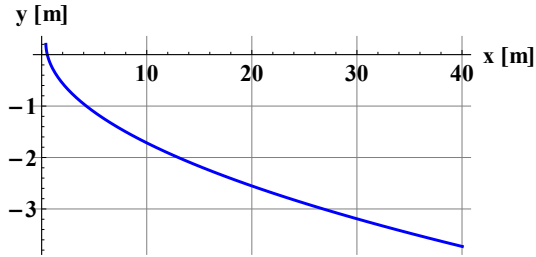
Rozwiązanie układu nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu wyznaczone zostało numerycznie dla przyjętych danych oraz założonych warunków początkowych. Wyniki z rozwiązywania numerycznego (tor środka masy torusa i ślad na płaszczyźnie) pokazane są na rys. 5.14.



Rysunek 5.14: Model torusa – tor środka masy i ślad punktu styku na płaszczyźnie XY

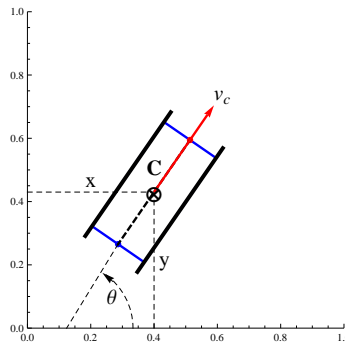
Zadanie 99. Wyznaczyć tor środka kuli o masie $m = 1$ kg i promieniu $r = 1$ m toczącej się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie pod wpływem siły $F_x = 0,1$ N (o stałej wartości oraz kierunku i zwrocie osi x). Warunki początkowe: $\psi(0) = \frac{\pi}{4}$, $\theta(0) = \frac{\pi}{9}$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$, $\dot{\psi}(0) = 0,25$ rad/s, $\dot{\theta}(0) = 0,1$ rad/s, $\dot{\varphi}(0) = 0,2$ rad/s, przy czym $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ są klasycznymi kątami Eulera (precesji, nutacji i obrotu własnego).

Odpowiedź: tor środka kuli jest przedstawiony na rys. 5.15.



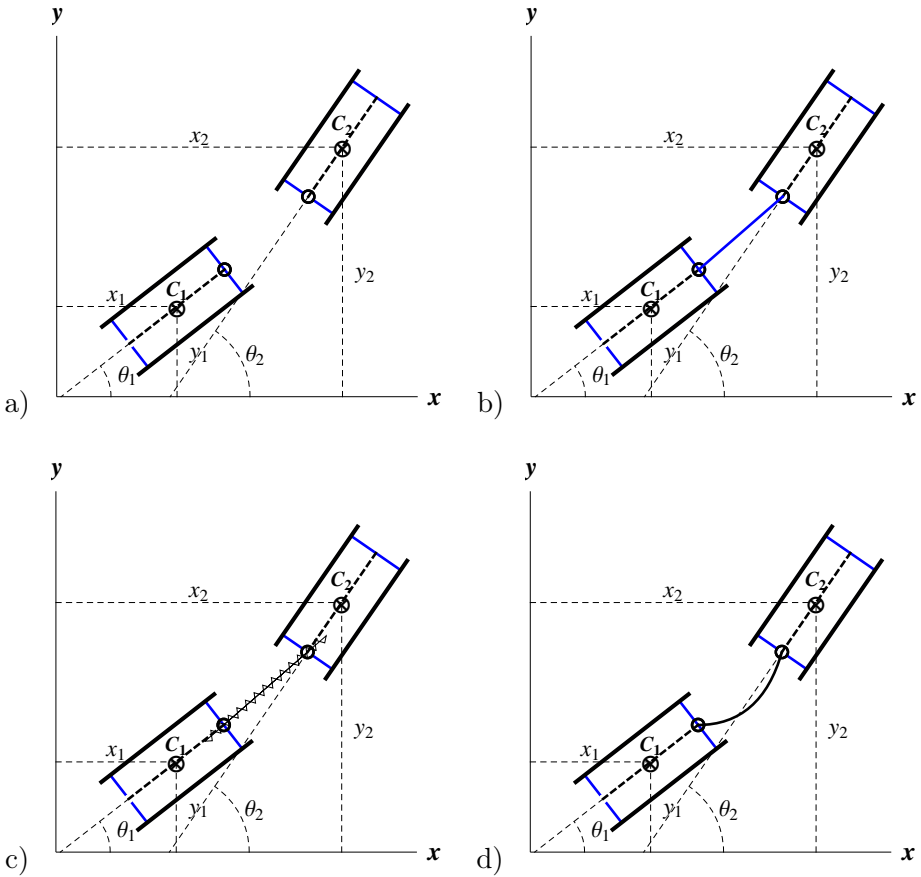
Rysunek 5.15: Wynik rozwiązania dla zadania 99 (tor środka kuli)

Zadanie 100. Napisać równania więzów i określić liczbę stopni swobody dla układu dwojga sań. Pojedyncze sanie są modelem Czapłygina (rys. 5.16), dla którego prędkość jednego punktu sań jest równoległa do płóz. W rozpatrywanym przypadku zakładamy, że tym punktem jest środek masy (C). Dla opisu ruchu pary sań wykorzystane są współrzędne $q_i = \{x_i(t), y_i(t), \theta_i(t)\}$ i prędkości uogólnione $\dot{q}_i = \{\dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{\theta}_i(t)\}$, gdzie $i = 1, 2$. Rozpatrzeć cztery przypadki połączenia sań przedstawione na rys. 5.17.

Rysunek 5.16: Model sań Czapłygina – współrzędne uogólnione i kierunek wektora prędkości środka masy (C)

Tablica 5.3: Zadane wielkości dla sań

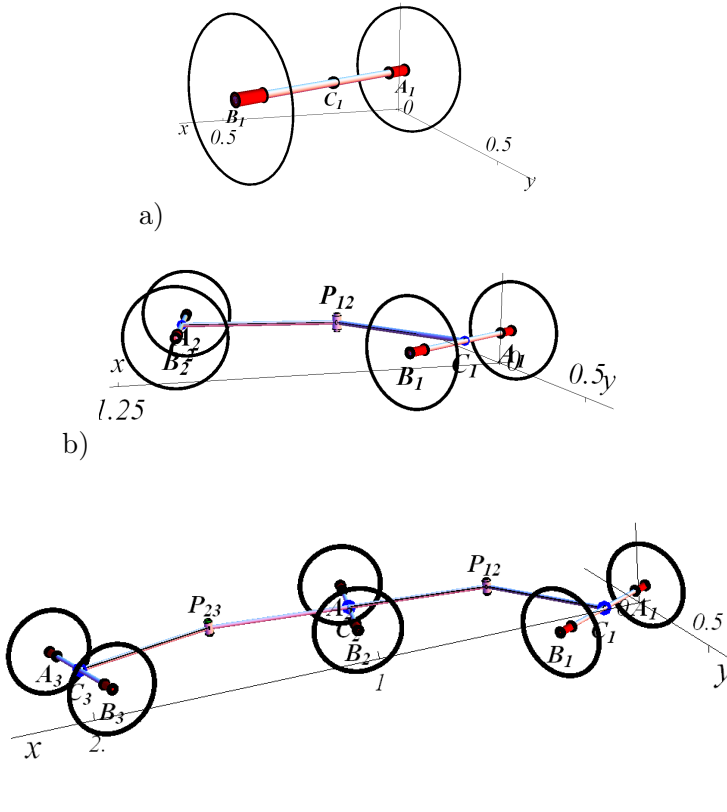
	Nazwa	Oznaczenie
1	Długość sań	a
2	Szerokość sań	b
3	Długość pręta łączącego sanie	L
4	Długość sprężyny łączącej sanie	$L_0 < L$
5	Długość liny łączącej sanie	$L_1 > L$



Rysunek 5.17: Modele układu połączonych sań Czapłygina: a) brak połączenia, b) sztywny pręt, c) sprężyna, d) nierozciągliwa lina

Zadanie 101. Określić liczbę stopni swobody (po napisaniu równań więzów) dla układu wózków pokazanych na rys. 5.18. Koła wózków toczą się bez poślizgu po poziomej nieruchomej płaszczyźnie. Dla wózków wprowadzimy następujące współrzędne $q_i = \{x_i(t), y_i(t), \psi_i(t), \varphi_i(t)\}$ i prędkości uogólnione $\dot{q}_i = \{\dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{\psi}_i(t), \dot{\varphi}_i(t)\}$, gdzie $i = 1, \dots, 6$. Współrzędne $x_i(t), y_i(t)$ określają położenie środka koła, $\psi_i(t)$ jest kątem między płaszczyzną koła i płaszczyzną Oxz , natomiast $\varphi_i(t)$ określa kąt obrotu koła.

Rozpatrzyć trzy przypadki przedstawione na rys. 5.18 przyjmując, że w punktach P_{12} i P_{23} ramy wózków są połączone przegubem walcowym o pionowej osi.



Rysunek 5.18: Modele wózka: a) dwukołowego, b) czterokołowego, c) sześciokołowego

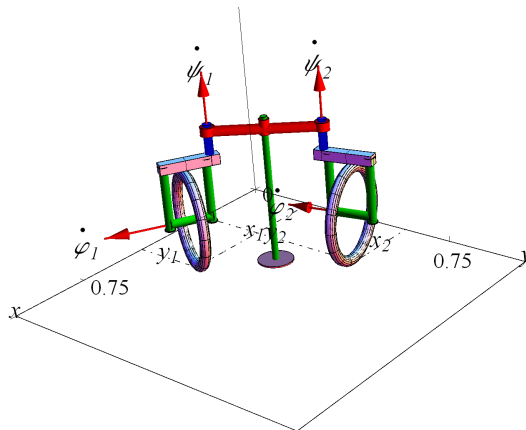
Tablica 5.4: Wielkości zadane dla wózków

	Nazwa	Oznaczenie
1	Długości osi wózków $A_i B_i$	c
2	Długości prętów łączących wózki $C_i P_{jk}$	a
3	Promień kół R	R

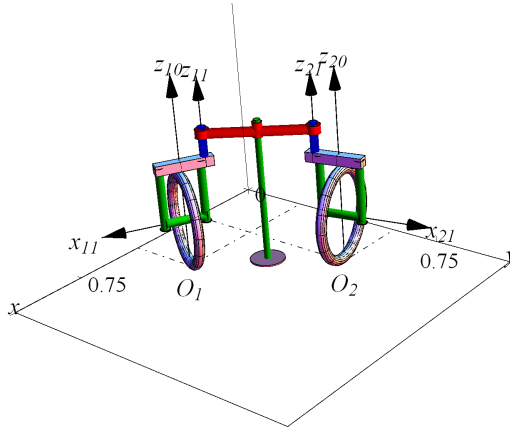
Odpowiedź: a) 2, b) 2, c) 2.

Zadanie 102. Dwa koła połączone ze sobą toczą się bez poślizgu po poziomej nieruchomej płaszczyźnie. Układ wyposażony jest w podpórkę o idealnie gładkiej poziomej podstawie, która może ślizgać się po podłożu. Położenie opisane jest za pomocą następujących współrzędnych $q = \{x_1(t), y_1(t), \psi_1(t), \varphi_1(t), x_2(t), y_2(t), \psi_2(t), \varphi_2(t)\}$, przy czym $x_i(t), y_i(t)$ są współrzędnymi określającymi położenie środka masy i -tego koła, a $\psi_i(t), \varphi_i(t)$ są kątami określającymi położenie płaszczyzny i -tego koła i jego kąt obrotu.

Określić liczbę stopni swobody (napisać wszystkie równania więzów). W tablicy 5.5 zestawione są potrzebne dane.



Rysunek 5.19: Model wózka dwukołowego z podpórką – wektory prędkości kątowych ciał



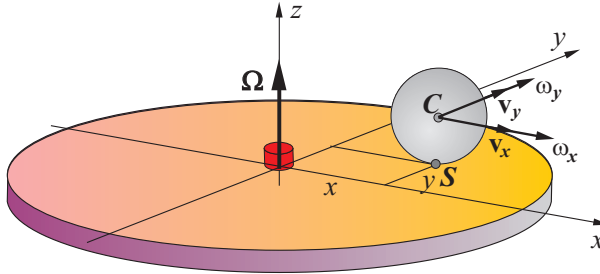
Rysunek 5.20: Model wózka dwukołowego z podpórką – osie obrotu x_{11} , z_{11} , x_{21} , z_{21} oraz osie z_{10} , z_{20} przechodzące przez środki kół

Tablica 5.5: Dane charakteryzujące model połączonych kół

	Nazwa	Oznaczenie
1	Odległość między osiami z_{10} i z_{11}	c
2	Odległość między osiami z_{20} i z_{21}	c
3	Odległość między osiami z_{11} i z_{21}	a
4	Promień kół R	R

Zadanie 103. Kula o promieniu a została umieszczona na doskonale chropowatej powierzchni poziomej tarczy (rys. 5.21), a następnie tarczy została nadana stała prędkość kątowna (Ω) wokół pionowej osi z .

Określić równania więzów i liczbę stopni swobody układu, przyjmując jako współrzędne uogólnione $q = \{x(t), y(t), \psi(t), \theta(t), \varphi(t)\}$, przy czym $x(t)$, $y(t)$ są współrzędnymi określającymi położenie środka masy kuli ($z(t) = 0$), $a\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ są kątami Eulera.



Rysunek 5.21: Położenie i prędkości kuli na obracającej się tarczy

Odpowiedź – równania więzów kinematycznych:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \Omega y - a(\dot{\theta} \cos \psi(t) - \dot{\varphi}(t) \sin \theta(t) \cos \psi(t)) &= 0, \\ \dot{y}(t) - \Omega x + a(\dot{\theta} \sin \psi(t) + \dot{\varphi}(t) \sin \theta(t) \sin \psi(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Dodatek A

Kinematyka ciała sztywnego

W mechanice analitycznej, przy analizie modeli układów zawierających ciała sztywne, konieczne jest określenie zależności pomiędzy prędkościami (a także pomiędzy przyspieszeniami) punktów należących do tego samego ciała.

Zależności kinematyczne wyrażające związek między prędkościami i przyspieszeniami punktów ciała sztywnego wynikają z niezmiennych odległości pomiędzy punktami tego ciała (inaczej mówiąc z więzów geometrycznych nałożonych na punkty ciała sztywnego).

Prędkość dowolnego punktu (A) należącego do ciała sztywnego jest określona jako [8]

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} , \quad (\text{A.1})$$

albo

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} , \quad \text{gdzie} \quad \vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} , \quad (\text{A.2})$$

przy czym \vec{v}_A oznacza poszukiwaną prędkość punktu A , \vec{v}_B jest prędkością punktu B tego samego ciała, $\vec{\omega}$ oznacza wektor prędkości kątowej ciała, a \vec{r}_{BA} wektor położenia punktu A względem B . Prędkość $\vec{v}_{A/B}$ oznacza prędkość punktu A w jego ruchu względem punktu B .

Przyspieszenie (\vec{a}_A) dowolnego punktu (A) wyznacza się z zależności

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) , \quad (\text{A.3})$$

gdzie \vec{a}_B jest przyspieszeniem punktu B , natomiast $\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ oznacza wektor przyspieszenia kątowego ciała. Wzór na przyspieszenie można zapisać krótko w formie

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}^r + \vec{a}_{A/B}^\eta , \quad (\text{A.4})$$

przy czym składowe styczna ($\vec{a}_{A/B}^\tau$) i normalna ($\vec{a}_{A/B}^\eta$) przyspieszenia punktu A ruchu względem punktu B są odpowiednio równe:

$$\vec{a}_{A/B}^\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}, \quad \vec{a}_{A/B}^\eta = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}), \quad (\text{A.5})$$

Ze szczególnymi przypadkami ruchu mamy do czynienia wtedy, gdy składowe wektora prędkości spełniają pewne warunki, i tak jeśli:

- $\vec{\omega}$ – jest równoległa do \vec{v}_B , to ruch jest nazywany ruchem śrubowym,
- $\vec{v}_B = \vec{0}$ – to mamy do czynienia z ruchem kulistym,
- $\vec{\omega}$ – jest prostopadła do pewnej stałej płaszczyzny, to ruch nazywa się ruchem płaskim,
- $\vec{v}_B = \vec{0}$ i $\vec{\omega}$ mają stały kierunek – to mamy do czynienia z ruchem obrotowym,
- $\vec{\omega} = \vec{0}$ i $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ – to ruch nazywamy ruchem postępowym.

A.1 Prędkość punktów ciała sztywnego

Zależności pomiędzy prędkościami są wykorzystywane zarówno w zagadnieniach statyki analitycznej (używamy tam prędkości wirtualnych tych punktów ciała, w których przyłożone są siły), jak i dynamiki analitycznej (przy określaniu energii kinetycznej ciała).

Wyznaczenie prędkości dowolnego punktu ciała sztywnego (np. \vec{v}_A) jest możliwe wówczas, gdy znana jest prędkość innego punktu należącego do tego ciała (np. \vec{v}_B) i prędkość kątowna ciała ($\vec{\omega}$). W przypadku, gdy prędkość kątowna ciała ($\vec{\omega}$) jest nieznana, to można ją określić wówczas, gdy znany jest wektor prędkości jednego punktu ciała (np. \vec{v}_B) i kierunek wektora prędkości innego punktu ciała (np. \vec{v}_A).

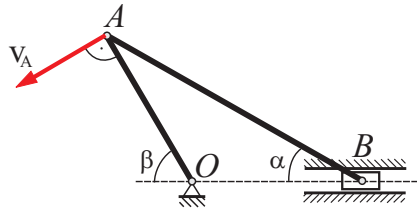
A.2 Metody określania prędkości punktów ciała sztywnego

Zadania polegające na określeniu prędkości punktu ciała sztywnego można rozwiązać na kilka sposobów:

- metodą bieguna,
- metodą środka chwilowego obrotu,

- metodą rzutów prędkości (korzystając z twierdzenia o rzutach prędkości punktów na oś poprowadzoną przez te punkty ciała sztywnego).

Każda z tych metod jest omówiona na przykładzie przedstawionym na rys. A.1, w którym dla zadanej prędkości punktu A (\vec{v}_A) należy wyznaczyć prędkość punktu B .

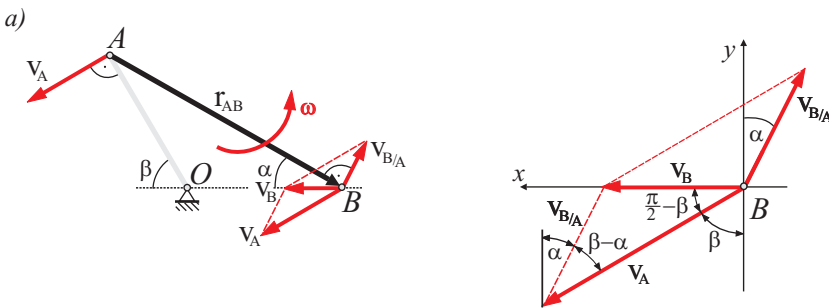


Rysunek A.1: Mechanizm korbowy poruszający się ze znaną prędkością punktu A

A.2.1 Metoda bieguna

Metoda bieguna polega na wykorzystaniu zależności pomiędzy wektorami prędkości dwóch punktów należących do jednego ciała. W tym zadaniu poszukujemy wektora \vec{v}_B , zatem

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} . \tag{A.6}$$



Rysunek A.2: Mechanizm korbowy – określenie wektora \vec{v}_B metodą bieguna

Ponadto wiemy, że kierunek wektora \vec{v}_B musi być poziomy (co wynika z więzów nałożonych na punkt B), a $\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$ jest wektorem pro-

stopadłym do wektora \vec{r}_{AB} . Równoległobok zbudowany na wektorach \vec{v}_A i $\vec{v}_{B/A}$ oraz jego przekątna \vec{v}_B są przedstawione na rys. A.2a.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczenia długości boku oraz przekątnej w równoległoboku (pierwszy sposób) lub do określenia rzutów wektora \vec{v}_B na osie x i y (drugi sposób).

Sposób pierwszy sprowadza się do wyznaczenia długości boków trójkąta dowolnego (rys. A.2b). Można w tym celu wykorzystać twierdzenie sinusów

$$\frac{v_B}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{v_A}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{v_{B/A}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)} . \quad (\text{A.7})$$

Drugi sposób, polegający na porównaniu rzutów wektora \vec{v}_B i jego składowych, prowadzi do równań:

$$v_{Bx} = v_B = v_A \sin \beta - v_{B/A} \sin \alpha , \quad (\text{A.8})$$

$$v_{By} = 0 = -v_A \cos \beta + v_{B/A} \cos \alpha . \quad (\text{A.9})$$

Oba sposoby prowadzą do rozwiązań o postaci:

$$v_{B/A} = v_A \cos \beta / \cos \alpha , \quad (\text{A.10})$$

$$v_B = v_A \sin \beta - v_A \cos \beta \operatorname{tg} \alpha$$

lub równoważnych im wyników.

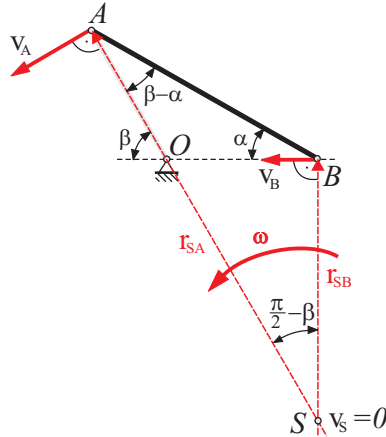
A.2.2 Metoda środka chwilowego obrotu

Metoda środka chwilowego obrotu bazuje na twierdzeniu Eulera, zgodnie z którym *dowolne przemieszczenie figury płaskiej może być zrealizowane poprzez jej obrót wokół pewnego punktu zwanego środkiem obrotu*.

W ruchu płaskim ciała sztywnego w każdej chwili czasu (w każdym położeniu ciała) można znaleźć taki punkt (S), którego prędkość jest równa zero ($\vec{v}_S = \vec{0}$). Położenie chwilowego środka obrotu S określa wektor \vec{r}_{AS} , przy czym

$$\vec{r}_{AS} = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_A , \quad r_{AS} = \frac{v_A}{\omega} . \quad (\text{A.11})$$

Środek chwilowego obrotu S leży na prostej prostopadłej do wektorów $\vec{\omega}$ i \vec{v}_A w odległości r_{AS} od punktu A . Jeśli znane są kierunki wektorów prędkości dwóch punktów ciała, to środek chwilowego obrotu S leży w punkcie przecięcia prostych prostopadłych do wektorów prędkości punktów ciała sztywnego (rys. A.3).



Rysunek A.3: Mechanizm korbowy – określenie położenia środka chwilowego obrotu S dla korbowodu

W przypadku, gdy w jakimś położeniu ciała wektory prędkości punktów są do siebie równoległe i proste prostopadłe do nich nie przecinają się, to znaczy, że w takim położeniu ciała porusza się ruchem postępowym ($\vec{\omega} = \vec{0}$), środek chwilowego obrotu nie istnieje (można powiedzieć inaczej, że leży w nieskończoności $r_{AS} \rightarrow \infty$).

Wykorzystując związki:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{v}_{B/S} = \vec{v}_{B/S} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{SB}, \quad \Rightarrow \quad v_B = \omega r_{SB}, \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_S + \vec{v}_{A/S} = \vec{v}_{A/S} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{SA}, \quad \Rightarrow \quad v_A = \omega r_{SA},$$

można podać rozwiązanie:

$$\omega = v_A / r_{SA}, \quad (\text{A.13})$$

$$v_B = v_A r_{SB} / r_{SA}.$$

Otrzymany wynik można przedstawić w innej formie, jeśli wykorzystamy się twierdzenie sinusów dla trójkąta ABS

$$\frac{r_{SA}}{\sin(\pi/2 + \alpha)} = \frac{r_{SB}}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad (\text{A.14})$$

co prowadzi do wyniku w formie

$$v_B = v_A \sin(\beta - \alpha) / \cos \alpha. \quad (\text{A.15})$$

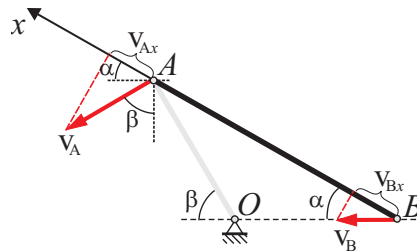
lub – po wykorzystaniu wzoru $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta$

$$v_B = v_A \sin \beta - v_A \cos \beta \operatorname{tg} \alpha . \quad (\text{A.16})$$

A.2.3 Metoda rzutów prędkości

Metoda rzutów prędkości polega na wykorzystaniu twierdzenia znanego z kinematyki ciała sztywnego, zgodnie z którym *rzuty wektorów prędkości punktów ciała sztywnego na oś przechodzącą przez te punkty są sobie równe*. Oznacza to, że dla prędkości dwóch punktów A i B , przez które przeprowadzona jest oś x , zachodzi związek

$$v_{Ax} = v_{Bx} . \quad (\text{A.17})$$



Rysunek A.4: Mechanizm korbowy – określenie rzutów prędkości punktów A i B (należących do korbowodu) na oś x

W rozpatrywanym przykładzie (rzuty prędkości punktów A i B są przedstawione na rys. A.4) wykorzystuje się zależność

$$v_A \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta\right) = v_B \cos \alpha , \quad (\text{A.18})$$

a na jej podstawie otrzymuje się wynik

$$v_B = v_A \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha)\right) / \cos \alpha = v_A \sin(\beta - \alpha) / \cos \alpha , \quad (\text{A.19})$$

który można przekształcić do postaci

$$v_B = v_A \sin \beta - v_A \cos \beta \operatorname{tg} \alpha . \quad (\text{A.20})$$

Dodatek B

Energia kinetyczna ciała sztywnego

B.1 Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu ogólnym

Energia kinetyczna ciała sztywnego jest wielkością zależną od wartości jego masy, od rozkładu masy i prędkości punktów w obszarze ciała. Wyrażenie umożliwiające określenie energii kinetycznej ciała sztywnego na podstawie prędkości dowolnie wybranego punktu (B) i prędkości kątowej ciała ma formę [8]

$$T = \frac{1}{2}m v_B^2 + m \begin{vmatrix} v_{Bx} & v_{By} & v_{Bz} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_{BCx} & r_{BCy} & r_{BCz} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}J_{lB} \omega^2, \quad (\text{B.1})$$

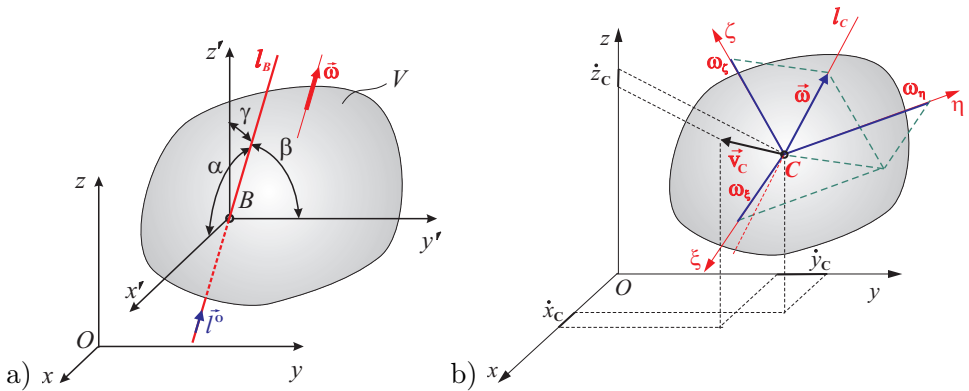
przy czym: m oznacza masę ciała, v_B – wartość wektora prędkości wybranego bieguna B (o składowych v_{Bx} , v_{By} , v_{Bz}), ω jest wartością wektora prędkości kątowej ciała (o składowych ω_x , ω_y , ω_z), natomiast r_{BCx} , r_{BCy} , r_{BCz} są składowymi wektora \vec{r}_{BC} określającego położenie środka masy ciała (C) względem punktu B . Symbol J_{lB} przedstawia masowy moment bezwładności ciała względem prostej (osi) poprowadzonej przez punkt B i równoległej do osi chwilowego obrotu ciała.

Masowy moment bezwładności względem prostej l_B zależy od kierunku osi chwilowego obrotu (od kierunku wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$) względem

układu odniesienia (rys. B.1a). Wartość J_{l_B} można wyznaczyć na podstawie zależności [8]

$$J_{l_B} = J_{x'} \cos^2 \alpha + J_{y'} \cos^2 \beta + J_{z'} \cos^2 \gamma - \\ - 2J_{x'y'} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{y'z'} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{z'x'} \cos \alpha \cos \gamma, \quad (\text{B.2})$$

w której kąty α , β i γ określają orientację prostej l_B (i wektora prędkości kątowej ciała $\vec{\omega}$) względem nieruchomego układu współrzędnych xyz , zaś $J_{x'}$, $J_{y'}$, ... $J_{z'x'}$ są masowymi momentami bezwładności i momentami dewiacyjnymi ciała względem osi $x'y'z'$.



Rysunek B.1: Oznaczenia: a) kąty α , β i γ określające orientację prostej l_B (i wektora prędkości kątowej ciała $\vec{\omega}$) względem osi $x'y'z'$ (równoległych do nieruchomych osi xyz), b) wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i jego rzuty na osie $\xi\eta\zeta$ – układu związanego z ciałem oraz prędkość środka masy ciała \vec{v}_C i jej rzuty na osie $x_c y_c z_c$

W szczególnym przypadku, gdy za biegun wybieramy środek masy ciała (punkt C), co oznacza, że $r_{BC} = 0$ ($B \rightarrow C$), wówczas

$$T = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} J_{l_B} \omega^2 \equiv \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{l_C} \omega^2, \quad (\text{B.3})$$

gdzie J_{l_C} jest masowym momentem bezwładności ciała względem prostej poprowadzonej przez środek masy (C) i równoległej do osi chwilowego obrotu ciała.

Niedogodnością opisu energii kinetycznej przy użyciu wzorów (B.1) i (B.3) jest to, że masowe momenty bezwładności ciała J_{l_B} i J_{l_C} zmieniają swoje wartości podczas ruchu ciała – o ile zmienia się kierunek osi obrotu.

Energia kinetyczna ciała może też być określona za pomocą wartości prędkości środka masy ciała (v_C) oraz jego prędkości kątowej (ω) wyrażonej poprzez składowe ω_ξ , ω_η , ω_ζ , określone w układzie współrzędnych $C\xi\eta\zeta$ – sztywno związanym z ciałem (rys. B.1b), jako [16]

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}(J_{C\xi}\omega_\xi^2 + J_{C\eta}\omega_\eta^2 + J_{C\zeta}\omega_\zeta^2 + 2J_{C\xi\eta}\omega_\xi\omega_\eta - 2J_{C\eta\zeta}\omega_\eta\omega_\zeta - 2J_{C\xi\zeta}\omega_\xi\omega_\zeta). \quad (\text{B.4})$$

Jeśli prędkość (v_C) jest wyrażona poprzez składowe (\dot{x}_C , \dot{y}_C , \dot{z}_C) określone w nieruchomym układzie współrzędnych xyz , to

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2}(J_{C\xi}\omega_\xi^2 + J_{C\eta}\omega_\eta^2 + J_{C\zeta}\omega_\zeta^2 + 2J_{C\xi\eta}\omega_\xi\omega_\eta - 2J_{C\eta\zeta}\omega_\eta\omega_\zeta - 2J_{C\xi\zeta}\omega_\xi\omega_\zeta). \quad (\text{B.5})$$

We wzorze (B.5) składowe skalarne \dot{x}_C , \dot{y}_C , \dot{z}_C wektora prędkości środka masy (\vec{v}_C) są jego rzutami na osie nieruchomego układu współrzędnych xyz , natomiast prędkości kątowe ω_ξ , ω_η , ω_ζ oznaczają rzuty wektora prędkości kątowej ciała ($\vec{\omega}$) na osie $C\xi\eta\zeta$ układu sztywno związanego z poruszającym się ciałem (rys. B.1b). Symbole $J_{C\xi}$, $J_{C\eta}$, $J_{C\zeta}$ reprezentują masowe momenty bezwładności względem osi $\xi\eta\zeta$ o początku w środku masy ciała C , natomiast $J_{C\xi\eta}$, $J_{C\eta\zeta}$, $J_{C\xi\zeta}$ są momentami dewiacyjnymi określonymi w tym samym układzie współrzędnych ($C\xi\eta\zeta$).

Gdy jako osie układu związanego z ciałem ($C\xi\eta\zeta$) przyjęte są osie główne, to momenty odśrodkowe są równe zero ($J_{C\xi\eta} = 0$, $J_{C\eta\zeta} = 0$, $J_{C\xi\zeta} = 0$), a wzór na energię kinetyczną ciała (B.5) przyjmuje postać

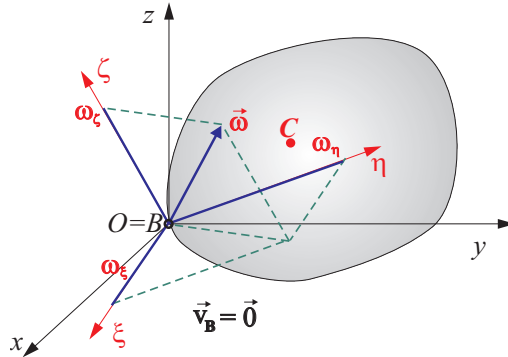
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2}(J_{C\xi}\omega_\xi^2 + J_{C\eta}\omega_\eta^2 + J_{C\zeta}\omega_\zeta^2). \quad (\text{B.6})$$

Określanie energii kinetycznej ciała przy użyciu wzorów (B.4)–(B.6) jest wygodne z tego względu, że wartości momentów $J_{C\xi}$, $J_{C\eta}$, ... $J_{C\xi\zeta}$ wyznaczone względem osi $C\xi\eta\zeta$ związanych z ciałem sztywnym nie ulegają zmianie podczas ruchu takiego ciała.

B.2 Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu kulistym

Dla ciała sztywnego o unieruchomionym jednym punkcie, na przykład B – to jest ciała poruszającego się ruchem kulistym, przy czym $v_B = 0$ – wyrażenie na energię kinetyczną ma postać

$$T = \frac{1}{2} J_{IB} \omega^2 = \frac{1}{2} (J_{B\xi} \omega_\xi^2 + J_{B\eta} \omega_\eta^2 + J_{B\zeta} \omega_\zeta^2 + -2J_{B\xi\eta} \omega_\xi \omega_\eta - 2J_{B\eta\zeta} \omega_\eta \omega_\zeta - 2J_{B\zeta\xi} \omega_\zeta \omega_\xi) . \quad (\text{B.7})$$



Rysunek B.2: Ruch kulisty ciała ($\vec{v}_O = \vec{v}_B = \vec{0}$) – wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i jego rzuty na osie $B\xi\eta\zeta$ układu sztywno związanego z ciałem

Osie układu związanego z ciałem ($B\xi\eta\zeta$) mają w tym przypadku początek w punkcie nieruchomym B (rys. B.2). Masowe momenty bezwładności i momenty dewiacyjne wyznaczone względem osi $B\xi\eta\zeta$ mają stałe wartości. Jeśli są to osie główne, wówczas $J_{B\xi\eta} = 0$, $J_{B\eta\zeta} = 0$, $J_{B\zeta\xi} = 0$, a energia kinetyczna jest określona wzorem

$$T = \frac{1}{2} (J_{B\xi} \omega_\xi^2 + J_{B\eta} \omega_\eta^2 + J_{B\zeta} \omega_\zeta^2) . \quad (\text{B.8})$$

B.3 Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu płaskim

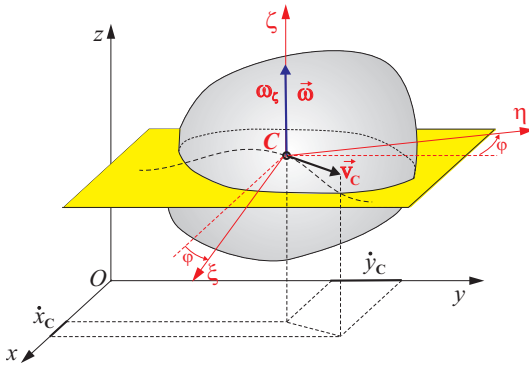
Energia kinetyczna ciała poruszającego się ruchem płaskim – na przykład w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny xy (wówczas $v_{Cz} = v_{Cz} = z'_C = 0$) oraz przy założeniu, że wektor prędkości kątowej ma kierunek osi ζ (oś ζ jest równoległa do z), a więc $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$ – może być określona na podstawie (B.5) jako

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_{C\zeta} \omega_\zeta^2 . \quad (\text{B.9})$$

Używając oznaczeń $\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = v_C^2$, $\omega_\zeta = \omega$ oraz $J_{C\zeta} \equiv J_{Cz} \equiv J_C$, otrzymuje się wzór

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2, \quad (\text{B.10})$$

w którym J_C oznacza masowy moment bezwładności ciała względem osi (z) prostopadłej do płaszczyzny xy i przechodzącej przez środek masy ciała (C).



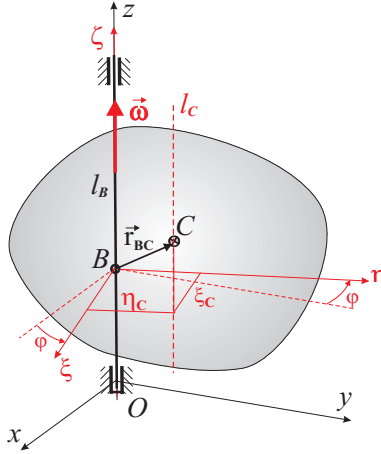
Rysunek B.3: Ruch płaski ciała w płaszczyźnie równoległej do xy (oś ζ równoległa do z) – prędkość środka masy \vec{v}_C ($v_{C\zeta} = v_{Cz} = \dot{z}_C = 0$) i wektor prędkości kątovej $\vec{\omega}$ ciała ($\omega_\xi = \omega_\eta = 0$)

B.4 Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym

Przy założeniu, że ciało obraca się wokół nieruchomej osi – na przykład ζ (ζ pokrywa się z osią z) – przechodzącej przez nieruchomy punkt B (rys. B.4) na podstawie zależności (B.1) otrzymuje się wzór

$$T = \frac{1}{2} J_{IB} \omega^2. \quad (\text{B.11})$$

Symbol J_{IB} – w tym przypadku – przedstawia masowy moment bezwładności ciała względem nieruchomej osi obrotu przechodzącej przez punkt B . (W przypadku ruchu obrotowego oś chwilowego obrotu ciała nie zmienia kierunku ani położenia – jest stałą osią obrotu). Wzór (B.11) można sprawdzić podstawiając w (B.1) wartości $v_B = 0$ oraz $v_{Bx} = v_{By} = v_{Bz} = 0$.



Rysunek B.4: Ruch obrotowy ciała wokół nieruchomej osi ζ (oś ζ pokrywa się z osią z) przechodzącej przez punkt B

Dla ciała poruszającego się ruchem obrotowym wokół nieruchomej osi do wyznaczenia energii kinetycznej można też użyć ogólnej zależności (B.3), to jest

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{IC} \omega^2, \quad (\text{B.12})$$

w której występuje prędkość środka masy ciała (v_C) i masowy moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez punkt C (J_{IC}). (Jeśli kwadrat prędkości środka masy ciała przedstawi się jako $v_C^2 = \omega^2(\xi_C^2 + \eta_C^2)$, to otrzymuje się $T = \frac{1}{2} [m(\xi_C^2 + \eta_C^2) + J_{IC}] \omega^2 \equiv \frac{1}{2} J_{IB} \omega^2$, gdyż – zgodnie z twierdzeniem Steinera – $J_{IB} = J_{IC} + m(\xi_C^2 + \eta_C^2)$).

Dodatek C

Przykłady rozwiązań zadań przy użyciu komputera – system *wxMaxima*

System *wxMaxima* jest graficznym interfejsem MAXIMA bazującym na *wxWidgets* ((C)2004 – 2015 Andrej Vodopivec). System *wxMaxima* jest dostępny w Internecie¹.

Przy użyciu systemu *wxMaxima* można rozwiązywać różnego rodzaju zadania matematyczne. (Podobne, ale znacznie szersze możliwości mają komercyjne systemy, takie jak *Mathematica*, *Mathcad*, *Maple*, *Matlab*). Z tego względu system *wxMaxima* świetnie nadaje się do rozwiązywania zadań z mechaniki (do rozwiązywania układów równań algebraicznych liniowych, równań nieliniowych, równań różniczkowych itp.). Co więcej, może być też użyty do generowania równań mechaniki dla złożonych układów, do opisu których używa się równań Lagrange’a, Maggi’ego czy Boltzmann-Hamela.

Przykłady zastosowania systemu *wxMaxima* do rozwiązywania niektórych zadań z tego skryptu są omówione w tym Dodatku.

C.1 Wykorzystanie systemu *wxMaxima* do rozwiązania układu równań algebraicznych

Do rozwiązania układu równań otrzymanego w zadaniu przedstawionym na s. 58 można użyć systemu *wxMaxima* (v.15.04.0).

¹System *wxMaxima* można pobrać ze strony <http://maxima.sourceforge.net>

Otrzymany układ to dwa równania wynikające z ogólnego równania dynamiki i dwie zależności kinematyczne pomiędzy przyspieszeniami:

$$m_1\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 - 2 m_3\ddot{y}_3 - m_1g + m_2g + 2 m_3g = 0 ,$$

$$m_3\ddot{y}_3 - m_4\ddot{y}_4 - m_3g + m_4g = 0 ,$$

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0 ,$$

$$\ddot{y}_3 + \ddot{y}_4 - 2\ddot{y}_2 = 0 .$$

Zatem należy rozwiązać układ czterech równań algebraicznych liniowych ze względu na poszukiwane przyspieszenia: $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4$.

Przy rozwiązywaniu układu równań z wykorzystaniem systemu *wxMaxima* użyte zostały następujące oznaczenia: $m_1\ddot{y}_1 \Rightarrow m1*\ddot{y}1$, $m_2\ddot{y}_2 \Rightarrow m2*\ddot{y}2$, $m_3\ddot{y}_3 \Rightarrow m3*\ddot{y}3$, $m_4\ddot{y}_4 \Rightarrow m4*\ddot{y}4$. Równania są zdefiniowane jako **r1**, **r2**, **r3**, **r4**, natomiast funkcja **algsys** rozwiązuje te równania względem poszukiwanych zmiennych: **ddoty1**, **ddoty2**, **ddoty3**, **ddoty4**. Procedura służąca do rozwiązywania ma następującą budowę:

```
r1 : m1*ddoty1 - m2*ddoty2 - 2*m3*ddoty3 - m1*g + m2*g +
2*m3*g;
r2 : m3*ddoty3 - m4*ddoty4 - m3*g + m4*g;
r3 : ddoty1 + ddoty2;
r4 : ddoty3 + ddoty4 - 2*ddoty2;
algsys([r1, r2, r3, r4], [ddoty1,ddoty2,ddoty3,ddoty4]);
```

Otrzymane wyniki rozwiązania (dla dowolnych wartości mas **m1**, **m2**, **m3**, **m4**):

```
ddoty1=-((4*g*m3+g*m2-g*m1)*m4+(g*m2-g*m1)*m3)/((4*m3+m2+m1)*m4+
(m2+m1)*m3),
ddoty2= ((4*g*m3+g*m2-g*m1)*m4+(g*m2-g*m1)*m3)/((4*m3+m2+m1)*m4+
(m2+m1)*m3),
ddoty3=((4*g*m3+g*m2-3*g*m1)*m4+(g*m2+g*m1)*m3)/((4*m3+m2+m1)*m4+
(m2+m1)*m3),
ddoty4=((4*g*m3+g*m2+g*m1)*m4+(g*m2-3*g*m1)*m3)/((4*m3+m2+m1)*m4+
(m2+m1)*m3).
```

Przykład procedury rozwiązania dla danych szczególnych $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, $m_3 = m$, $m_4 = 2m$:

```
m1:4*m; m2:m; m3:m; m4:2*m;
r1 : m1*ddoty1 - m2*ddoty2 - 2*m3*ddoty3 - m1*g + m2*g +
2*m3*g;
r2 : m3*ddoty3 - m4*ddoty4 - m3*g + m4*g;
r3 : ddoty1 + ddoty2;
r4 : ddoty3 + ddoty4 - 2*ddoty2;
algsys([r1, r2, r3, r4], [ddoty1,ddoty2,ddoty3,ddoty4]);
```

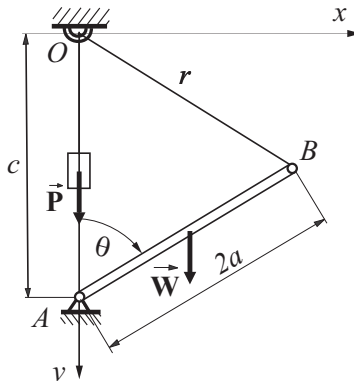
Wyniki rozwiązania dla danych $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, $m_3 = m$, $m_4 = 2m$:

$ddoty1=g/23$, $ddoty2=-g/23$, $ddoty3=-(9*g)/23$, $ddoty4=(7*g)/23$.

C.2 Wykorzystanie systemu *wxmaxima* do określenia położenia równowagi

Dla układu pokazanego na rys. 4.11 (s. 116) – obciążonego siłami ciężkości P i W , określić położenia równowagi i zbadać, czy są stateczne, czy niestateczne.

Dane są siły $P = 100$ N i $W = 150$ N, wymiary $c = 1,2$ m, i $a = 1$ m oraz długość liny $L = 5$ m.

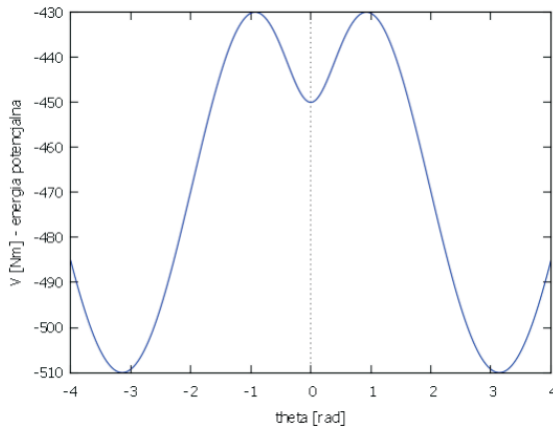


Rysunek C.1: Pręt podparty przegubowo utrzymywany w położeniu równowagi przez linę z zawieszonym obciążnikiem o ciężarze P

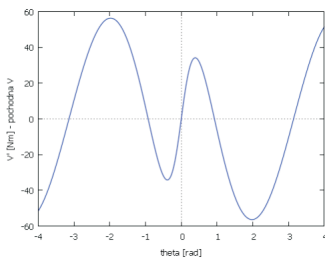
Przykład procedury umożliwiającej określenie przebiegu zmian energii potencjalnej w zależności od kąta $theta$ (ϑ):

```
P:100 $ W:150 $ a:1 $ c:1.2 $ L:5 $
V1:-P*(L-sqrt((2*a)^2+c^2-4*a*c*cos(theta)))-W*(c-a*cos(theta));
wxplot2d(V1,[theta,-4,4],[xlabel,'theta [rad]'],[ylabel,'V [Nm]
- energia potencjalna']);
V1p:diff(V1, theta);
wxplot2d(V1p,[theta,-4,4],[xlabel,'theta [rad]'],[ylabel,'V' -
pochodna V']);
V1pp:diff(V1p, theta);
wxplot2d(V1pp,[theta,-4,4],[xlabel,'theta [rad]'],[ylabel,'V'' -
druga pochodna V']);
```

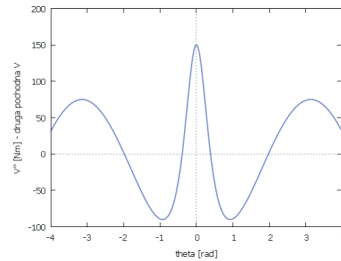
Wyniki rozwiązania – otrzymane w programie *wxMaxima* przebiegi zmian energii potencjalnej oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej w zależności od kąta ϑ (theta) są przedstawione na rysunkach.



Rysunek C.2: Przebieg zmian energii potencjalnej układu w funkcji kąta θ (theta)



a)



b)

Rysunek C.3: Przebieg zmian pierwszej (a) i drugiej (b) pochodnej energii potencjalnej układu w funkcji kąta θ (theta)

C.3 Wykorzystanie systemu *wxMaxima* do badania stateczności położenia równowagi

Dla układu przedstawionego na rys. 4.40 (s. 146), w którym tarcza ruchoma toczy się bez poślizgu po nieruchomym kole, narysować przebieg zmian energii potencjalnej w funkcji kąta φ (phi).

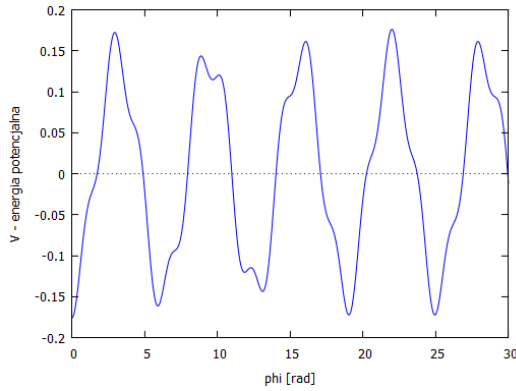
Położenia, w których energia potencjalna osiąga minimum określają lokalne położenia równowagi (Lokalne położenia równowagi można też wyznaczyć jako punkty w których pierwsza pochodna energii potencjalnej układu ma wartość zero).

Procedura służąca do wyznaczenia przebiegu zmian energii potencjalnej w zależności od kąta φ (phi):

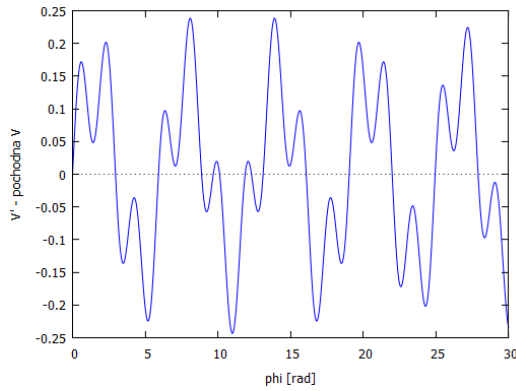
```
theta : phi*(r2 + r)/r ;
V : -m*g*(r2 + r)*cos(phi) - m1*g*(r2 + r)/2*cos(phi) -
m2*g*((r2 + r)*cos(phi) + L/2*cos(theta));
Vp:diff(V, phi);
Vpp:diff(Vp, phi);

m : 0.01; g : 9.81; m1 : 0.05; m2 : 0.03; r2 : 0.16; r :
0.07; L : 0.2;
wxplot2d(V, [phi,0,20], [xlabel,'phi [rad]'], [ylabel,'V [Nm] -
energia potencjalna']);
wxplot2d(Vp, [phi,0,20], [xlabel,'phi [rad]'], [ylabel,'V' -
pochodna V']);
wxplot2d(Vpp, [phi,0,20], [xlabel,'phi [rad]'], [ylabel,'V'' -
druga pochodna V']);
plot2d(V, [phi,0,20], [xlabel,'phi [rad]'], [ylabel,'V - energia
potencjalna']);
```

Wyniki rozwiązania – otrzymane w programie *wxMaxima* przebiegi zmian energii potencjalnej w funkcji kąta φ (phi) są przedstawione na rys. C.4. Rysunek C.5 zawiera przebieg zmian pierwszej pochodnej energii potencjalnej.



Rysunek C.4: Przebieg zmian energii potencjalnej układu w zależności od kąta φ (**phi**) dla danych $m = 0,01$ kg, $g = 9,81$ m/s², $m_1 = 0,05$ kg, $m_2 = 0,03$ kg, $r_2 = 0,16$ m, $r = 0,07$ m, $L = 0,2$ m



Rysunek C.5: Przebieg zmian pierwszej pochodnej energii potencjalnej układu w zależności od kąta φ (**phi**) – dane jak wyżej

C.4 Wykorzystanie systemu *wxMaxima* do generowania i rozwiązywania

Korzystając z równań Lagrange'a II-go rodzaju, określić równanie dynamiki wahadła o długości $l = L$ i masie m , którego koniec zamocowany jest do koła o promieniu R , obracającego się ze stałą prędkością kątową Ω (rys. 4.44, s. 152).

Narysować przebieg rozwiązania dla danych: $\Omega = \text{Omega} = 1 \text{ rad/s}$, $R = 1 \text{ m}$, $l = L = 1 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (wyniki nie zależą od wartości masy m).

Procedura jest podzielona na sześć etapów – cztery pierwsze to:

1. Określenie liczby stopni swobody układu i wybór współrzędnych uogólnionych.
2. Wyznaczanie położenia i prędkości punktu oraz energii kinetycznej i potencjalnej.
3. Generowanie równania dynamiki przy użyciu równań Lagrange'a II-go rodzaju (każdy ze składników równania jest wyznaczany oddzielnie).
4. Uproszczenie równania dynamiki.

Pierwsza część procedury w systemie *wxMaxima* jest następująca:

```
x : R*sin(Omega*t) + L*sin(phi(t));
z : R*cos(Omega*t) + L*cos(phi(t));
vphi : diff(phi(t),t);
vx : R*Omega*cos(Omega*t) + L*vphi*cos(phi(t));
vz : -R*Omega*sin(Omega*t) - L*vphi*sin(phi(t));
T : 1/2*m*(vx2 + vz2);
V : -m*g*z;
czlon3 : (diff(V,phi(t)));
czlon2 : (diff(T,phi(t)));
czlon11 : (diff(T,vphi));
czlon12 : (diff(czlon11,t));
rL : czlon12 - czlon2 + czlon3;
rLupr : trigsimp(trigreduce(rL));
```

Kolejne etapy rozwiązania to:

5. Podstawienie zadanych wartości.
6. Rozwiązywanie równań różniczkowych (metoda Runge-Kutta).

Uwaga: Parametrami procedury rk są prawe strony równań różniczkowych pierwszego rzędu. Równanie drugiego rzędu:

$$m \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\phi(t) - \Omega \cdot t) \cdot L \cdot R + m \cdot (\text{'diff}(\phi(t), t, 2)) \cdot L^2 + g \cdot m \cdot \sin(\phi(t)) \cdot L$$

zastępujemy dwoma równaniami pierwszego rzędu – używając podstawienia:

$$\text{'diff}(\phi(t), t, 2) = \text{'diff}(\omega_1, t, 1)$$

$$\text{'diff}(\phi_1, t, 1) = \omega_1$$

Zatem równania pierwszego rzędu mają formę:

$$\text{'diff}(\omega_1, t, 1) = -(\Omega^2 \cdot \sin(\phi_1 - \Omega \cdot t) \cdot R + g \cdot \sin(\phi_1)) / L$$

$$\text{'diff}(\phi_1, t, 1) = \omega_1$$

W procedurze wpisujemy prawe strony tych równań oraz zmienne, których pochodne są określone równaniami pierwszego rzędu (dla pierwszego równania jest to ω_1 , a dla drugiego ϕ_1).

Dalej podajemy warunki początkowe dla ω_1 i ϕ_1 ($[0, 0.1]$) oraz nazwę, przedział i krok zmian zmiennej niezależnej ($[t, 0, 10, 0.01]$).

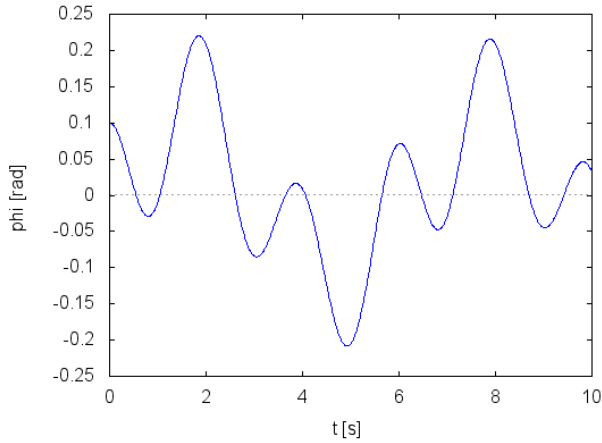
```
Omega:1; g:9.81; R:1; L:1;
sol:rk([-(Omega^2*sin(phi1-Omega*t))*R+g*sin(phi1))/L,omega1],
      [omega1,phi1],[0,0.1],[t,0,10,0.01])$
```

Dalsza część procedury w systemie *wxMaxima* to:

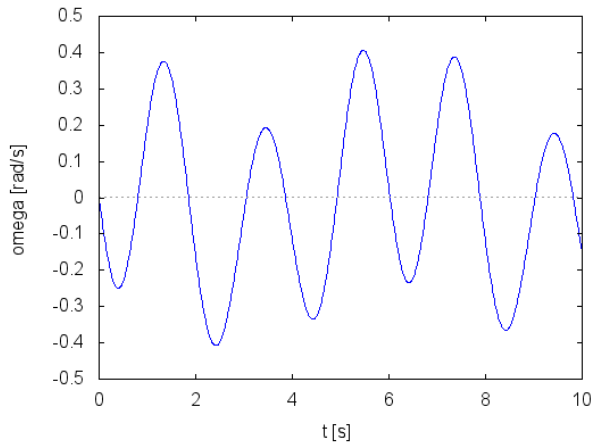
7. Drukowanie wyników rozwiązania.

```
wxplot2d ([discrete,makelist([p[1],p[2]],p,sol)],
          [xlabel,'t [s]'], [ylabel,'omega [rad/s]']);
wxplot2d ([discrete,makelist([p[1],p[3]],p,sol)],
          [xlabel,'t [s]'], [ylabel,'phi [rad]']);
wxplot2d ([[discrete,makelist([p[1],p[2]],p,sol)],
          [discrete,makelist([p[1],p[3]],p,sol)]]],
          [xlabel,'t [s]'], [ylabel,'omega [rad/s]']);
plot2d ([[discrete,makelist([p[1],p[2]],p,sol)],
          [discrete,makelist([p[1],p[3]],p,sol)]]],
          [xlabel,'t [s]'], [ylabel,'omega [rad/s]']);
```

Wyniki rozwiązania otrzymane z programu *wxmaxima*, to jest przebiegi zmian kąta φ (**phi**) i prędkości kątowej pręta $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (**omega**) w funkcji czasu są przedstawione na rys. C.6.



a)



b)

Rysunek C.6: Przebiegi rozwiązania – zmiany: a) kąta φ (**phi**), b) prędkości kątowej pręta $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (**omega**)

Bibliografia

- [1] **Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J.T.:** *Drgania układów fizycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008.
- [2] **Awrejcewicz J.:** *Mechanika techniczna i teoretyczna*. Politechnika Łódzka, Łódź 2011.
- [3] **Białkowski G.:** *Mechanika klasyczna*. Warszawa: PWN 1975.
- [4] **Blajer W.:** *Metoda projekcyjna – teoria i zastosowania w badaniu nieswobodnych układów mechanicznych*. WSI Radom, 13/1994.
- [5] **Blajer W.:** *Metody dynamiki układów wieloczołnowych*. Monografie WSI Radom, 35/1998.
- [6] **Chigarev, A.V., Chigarev J.V.:** *Kurs teoretičeskoj mehaniki*. Novoe Znanie, Minsk 2010.
- [7] **Gantmacher F.R.:** *Wykłady z mechaniki analitycznej*. PWN, Warszawa 1972.
- [8] **Grabski J., Strzałko J.:** *Wykłady z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2004.
- [9] **Grabski J., Mianowski B., Strzałko J.:** *Wybrane zagadnienia mechaniki*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1999.
- [10] **Grzesikiewicz W.:** *Dynamika układów mechanicznych z więzami*. Prace naukowe, Mechanika z. 117. Wydawnictwo PW, Warszawa 1990.
- [11] **Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D.:** *Mathematica narzędzie inżyniera*. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1994.

- [12] **Gutowski R.:** *Mechanika analityczna*. PWN Warszawa 1971.
- [13] **Huber M.T.:** *Mechanika ogólna i techniczna*. Warszawa: Czytelnik 1946.
- [14] **Kane T.R., Levinson D.A.:** *Dynamics: Theory and Applications*. New York McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [15] **Leyko J.:** *Dynamika układów materialnych cz.II*. PWN, Warszawa 1961.
- [16] **Leyko J.:** *Mechanika ogólna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
- [17] **Lurie, A.I.:** *Analitičeskaja mechanika*. Moskwa 1961.
- [18] **Lurie, A.I.:** *Analytical Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002.
- [19] **Mieščerskij, I.W.:** *Raboty po mechanike tel peremennoj massy*. Gostechizdat, Moskwa – Leningrad 1949.
- [20] **Nejmark J.I., Fufajev N.A.:** *Dynamika układów nieholonomicznych*. PWN, Wrocław 1971.
- [21] **Nikravesh P.E.:** *Computer – Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- [22] **Osiński Z.:** *Mechanika ogólna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1994.
- [23] **Pars L.A.:** *A Treatise on Analytical Dynamics*. Heinemann, London 1964.
- [24] **Pawłowski M.A., Akinfijewa L.J., Bojczuk O.F.:** *Teoreticzeskaja mechanika*. Vyższa Szkola, Kijew 1990.
- [25] **Rubinowicz W., Królikowski W.:** *Mechanika teoretyczna*. Wyd.7. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1995.
- [26] **Schielen W. (ed.):** *Multibody systems handbook*. Springer-Verlag, 1990.
- [27] **Skalmierski B.:** *Mechanika*. PWN, Warszawa 1994.

- [28] **Strzałko J., Grabski J.:** *Wstęp do mechaniki analitycznej*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.
- [29] **Strzałko J., Mianowski B.:** *Zadania z wybranych zagadnień mechaniki*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1985.
- [30] **Susłow G.K.:** *Mechanika teoretyczna*. PWN, 1960.
- [31] **Szmelter J.:** *Metody komputerowe w mechanice*. PWN, Warszawa 1980.
- [32] **Taylor J.R.:** *Mechanika klasyczna, t. 1-2*. PWN, Warszawa 2012.
- [33] **Wierzbiński M.:** *Mechanika klasyczna w zadaniach*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2010.
- [34] **Wittenburg J.:** *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. BG Teubner, Stuttgart 1977.
- [35] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL 2012.
- [36] **Zalewski A., Cegieła R.:** *Matlab – obliczenia numeryczne i ich zastosowania*. Wydawnictwo Nakom, Poznań, 1996.

Spis rysunków

1.1	Układy współrzędnych i ich wektory jednostkowe: a) prostoliniowy prostokątny (kartezjański), b) walcowy (cylindryczny), c) kulisty (sferyczny), d) elipsoidalny, e) stożkowy, f) hiperboloidalny	12
1.2	Swobodny punkt materialny o masie m , wypadkowa działających sił ($\vec{\mathbf{P}}$), prędkość ($\vec{\mathbf{v}}$) oraz zmiany prędkości ($\Delta\vec{\mathbf{v}}$) i pędu ($\Delta\vec{\mathbf{Q}}$)	14
1.3	Nieswobodny punkt materialny o masie m , siły czynne ($\vec{\mathbf{F}}$) i reakcji ($\vec{\mathbf{R}}$) oraz prędkość ($\vec{\mathbf{v}}$) i przyspieszenie ($\vec{\mathbf{a}}$)	15
1.4	Układ punktów materialnych (a) i ciało sztywne (b): siły zewnętrzne czynne ($\vec{\mathbf{F}}_i$) i reakcji ($\vec{\mathbf{R}}_j$) oraz siły wewnętrzne ($\vec{\mathbf{W}}_i$), prędkość środka masy ($\vec{\mathbf{v}}_C$), elementarne przemieszczenie punktu B ($d\vec{\mathbf{r}}_B$)	17
2.1	Punkty połączone nieodkształcalnym prętem – wektory wodzące i współrzędne prostokątne	25
2.2	Punkty połączone nierozciągliwą nicią	26
2.3	Podwójne wahadło matematyczne – współrzędne prostokątne	29
2.4	Model łyżwy – współrzędne prostokątne	31
2.5	Zagadnienie ”pościgu” – wektory prędkości punktów P i A	32
2.6	Model lotu rakiety samosterującej – wektory prędkości rakiety i jej celu	35
2.7	Więzy nałożone na punkt materialny i wynikające z nich kierunki wektorów: prędkości ($\vec{\mathbf{v}}$), przemieszczeń możliwych ($d\vec{\mathbf{r}}$, $d'\vec{\mathbf{r}}$) i przemieszczenia przygotowanego ($\delta\vec{\mathbf{r}}$)	39
2.8	Prędkości możliwe ($\vec{\mathbf{v}}$ i $\vec{\mathbf{v}}'$) punktu poruszającego się po powierzchni ruchomego ciała ($\vec{\mathbf{u}}$ – prędkość unoszenia)	40
2.9	Przemieszczenia możliwe ($d\vec{\mathbf{r}}$ i $d'\vec{\mathbf{r}}$) i przygotowane ($\delta\vec{\mathbf{r}}$) punktu poruszającego się po powierzchni ruchomego ciała	41

2.10	Ruch punktu po nieruchomej krzywej	44
2.11	Ruch punktu po ruchomej powierzchni (\vec{u} – prędkość unoszenia)	45
2.12	Punkt na ruchomej płaszczyźnie (przemieszczenia możliwe – linie przerywane, przemieszczenia przygotowane – linie ciągłe)	46
2.13	Dwa punkty połączone nieodkształcalnym prętem	47
2.14	Ciała połączone przegubem	48
2.15	Dwa gładkie stykające się ciała	49
2.16	Ciała doskonale chropowate (toczenie bez poślizgu)	50
2.17	Model układu w położeniu początkowym oraz współrzędne φ_1, φ_2	51
2.18	Dwa położenia modelu z zaznaczonymi przemieszczeniami przygotowanymi	52
2.19	Modele układu obciążonego siłą ciężkości \vec{F}_3 (a) i dwiema siłami $\frac{1}{2}\vec{F}_3$ (b) – z zaznaczonymi przemieszczeniami przygo- towanymi	53
2.20	Wykres siły Q_{φ_2} w funkcji kąta obrotu wahacza (φ_2)	54
3.1	Model układu czterech punktów	57
3.2	Sposób połączenia punktów i wprowadzone współrzędne	59
3.3	a) Wielokrążek potęgowy, b) wielokrążek sumowy (wielokrotny)	61
3.4	a) Obciążeniepunktu, b) położenia równowagi.	63
3.5	Model układu	64
3.6	Model prasy	65
3.7	Model konstrukcji – położenie równowagi	67
3.8	Model konstrukcji – oznaczenia użyte w rozwiązaniu	67
3.9	Platforma–podnośnik	68
3.10	Rysunek do zadania 37	68
3.11	Model wagi	69
3.12	Rysunkido zadań39 (a) i 40(b)	70
3.13	Rysunkido zadań 41 i 42	70
3.14	Punkt materialny na ruchomym klinie	72
3.15	Punkt materialny na obracającej się krzywej	74
3.16	Punkt materialny umieszczony pomiędzy dwiema obracają- cymi się, gładkimi, pionowymi płytami	78
3.17	Tor rakiety samosterującej (punktu R) i celu (punktu C) oraz wektory położenia względnego (\vec{r}_{RC}) i prędkości rakiety (\vec{v})	79
3.18	Model lotu rakiety samosterującej – tor rakiety (R) i celu (C) w kolejnych fazach ruchu: a) dla $t = 0, 6$ s, b) dla $t = 1, 1$ s, c) dla $t = 1, 6$ s	81

3.19	Układ punktów materialnych zawieszonych na linie	82
3.20	Punkt materialny umieszczony pomiędzy dwiema obracającymi się, gładkimi, pionowymi płaszczyznami – obciążenie i reakcja więzów	84
3.21	Przebiegi zmian mnożnika Lagrange’a (λ_1) i reakcji więzów (R) dla punktu materialnego umieszczonego pomiędzy dwiema obracającymi się płaszczyznami (dla danych: $m = 2$ kg, $\omega = 2$ rad/s, $x(0) = 2$ m, $y(0) = 0$, $z(0) = 10$ m, $\dot{y}(0) = 4$ m/s)	85
3.22	Przebieg współrzędnych dla punktu materialnego umieszczonego pomiędzy dwiema obracającymi się płaszczyznami ($x(t)$ – linia przerywana, $y(t)$ – linia punktowa, $z(t)$ – linia ciągła) (dla danych: $m = 2$ kg, $\omega = 2$ rad/s, $x(0) = 2$ m, $y(0) = 0$, $z(0) = 10$ m, $\dot{y}(0) = 4$ m/s)	85
3.23	Model "pościgu" (przypadek a) – tor punktu materialnego P i geometrycznego Z oraz wektory prędkości punktu P (kolor czarny) i siły reakcji więzów (kolor czerwony)	87
3.24	Model "pościgu" (przypadek b) – tor punktu materialnego P i geometrycznego Z oraz wektor prędkości punktu P (kolor czarny) i siły reakcji więzów (kolor czerwony)	89
3.25	Obciążenia i reakcje więzów działających na punkty materialne	89
4.1	Wahadło matematyczne	99
4.2	Ciało sztywne – redukcja układu sił do punktu O (wektor główny – \vec{S} oraz moment główny sił względem punktu O – \vec{M}_{gO})	100
4.3	Model prasy	105
4.4	Schemat układu i przemieszczenia przygotowane	107
4.5	Model mechanizmu – położenie równowagi	108
4.6	Model mechanizmu – prędkości punktów i prędkości kątowne ciał	109
4.7	Obciążenie podnośnika śrubowego	111
4.8	Model konstrukcji – położenie równowagi	112
4.9	Model konstrukcji – oznaczenia użyte w rozwiązaniu	112
4.10	Składowe prędkości punktów B, F, E, D	113
4.11	Pręt podparty przegubowo utrzymywany w położeniu równowagi przez linę z zawieszonym obciążnikiem o ciężarze P	116
4.12	Punkt materialny umieszczony na krzywej – położenia równowagi: stałej (1), chwiejnej (2), obojętnej (3)	118

4.13	Energia potencjalna V punktu (o masie $m = 1$ kg) pozostającego na krzywej pokazanej na rys. 4.12b (a) oraz jej pochodne $V' = \frac{dV}{dx}$ (b) i $V'' = \frac{d^2V}{dx^2}$ (c)	119
4.14	Przykłady minimum (a), maximum (b) oraz punktu siodłowego (c) energii potencjalnej dla funkcji dwóch zmiennych	121
4.15	Żuraw samojezdny i jego model fizyczny – zagadnienie statyki	122
4.16	Współrzędne uogólnione (y_1, φ) dla modelu żurawia	123
4.17	Wyniki rozwiązania dla modelu żurawia – wyznaczone położenia równowagi	124
4.18	Energia potencjalna V : przebieg zmian (a) i warstwic (b) oraz położenia równowagi statecznej (2), (3) i niestatecznej – punkty siodłowe (1), (4)	125
4.19	Energia potencjalna V : przebieg zmian (a) i warstwic (b) oraz położenia równowagi statecznej (2), (3) i niestatecznej – punkt siodłowy (1)	126
4.20	Model układu w położeniu, w którym pominięto wpływ siły ciężkości m_1g i siły sprężystości $c\lambda$	127
4.21	Model analizowanego układu w położeniu równowagi	128
4.22	Model układu w położeniu równowagi – oznaczenia pomocnicze	128
4.23	Przebiegi zmian energii potencjalnej i jej pochodnej	129
4.24	Wyniki rozwiązania – stateczne położenia równowagi modelu dla $\varphi_s = 0, 2597$ rad oraz dla $\varphi_s = -1, 1769$ rad (jednakowa skala dla wymiarów modelu i przemieszczeń)	130
4.25	Przebieg zmian pochodnej energii potencjalnej określonej w sposób dokładny (linia ciągła) i przybliżony (dla $\sin \varphi \rightarrow \varphi, \cos \varphi \rightarrow 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2}(\frac{\varphi}{2})^2$)	131
4.26	Przebiegi zmian energii potencjalnej i jej pochodnej określone w sposób przybliżony	132
4.27	Przebiegi zmian energii potencjalnej i jej pochodnej określone w sposób dokładny (linie ciągłe) i przybliżony (linie przerywane) – dla $\beta \neq 0$ i $\beta = 0$	133
4.28	Przebiegi zmian energii potencjalnej (a) i jej pochodnej (b) określone w sposób przybliżony	134
4.29	Przebiegi zmian energii potencjalnej (a) i jej pochodnej (b) określone w sposób dokładny (linie ciągłe) i przybliżony (linie przerywane)	134
4.30	Model układu: a) w położeniu odniesienia, b) w położeniu równowagi	135

4.31	Model układu (rurka nawleczona na nić) w położeniu równowagi	137
4.32	Energia potencjalna układu: a) powierzchnia $V(\Theta, x)$, b) warstwie $V(\Theta, x) = const_i$	140
4.33	Rysunek do zadania 68	142
4.34	Rysunkido zadań69 i 70	143
4.35	Stateczne i niestateczne położenia równowagi oraz energia potencjalna V – linie ciągłe i jej pochodna $V' = \frac{\partial V}{\partial \alpha}$ – linie przerywane (ilustracja do rozwiązania zadania 70)	143
4.36	Rysunekdo zadania 71 i 72	144
4.37	Rysunek do zadania 73	145
4.38	Rysunkido zadań74 i 75	145
4.39	Rysunek do zadania 75 oraz przebiegi zmian energii potencjalnej V (linia ciągła), jej pierwszej pochodnej (linia przerywana) i drugiej pochodnej (linia kropkowana)	146
4.40	Rysunek do zadania 77 i przykładowy przebieg zmian energii potencjalnej układu (wyniki dla danych: $m_1 = 0,05$ kg, $r = 0,07$ m, $m = 0,01$ kg, $r_2 = 0,16$ m, $m_2 = 0,03$ kg, $l = 0,3$ m, $g = 9,81$ m/s ²)	146
4.41	Model prasy	147
4.42	Rysunek do zadania 79 i 80	147
4.43	Wahadło matematyczne	151
4.44	Wahadło z ruchomym punktem zawieszenia	152
4.45	Wyniki obliczeń dla $\Omega = 1$ rad/si $\Omega = 2,5$ rad/s.	154
4.46	Regulator odśrodkowy	154
4.47	Wyniki obliczeń numerycznych dla regulatora (α – linia ciągła, φ – linia przerywana)	156
4.48	Model układu: a) w położeniu odniesienia, b) w położeniu równowagi	157
4.49	Model układu w położeniu wychylonym z położenia równowagi	158
4.50	Porównanie wyników rozwiązań numerycznych dla różnych warunków początkowych $y(0) = 0,04$ m, $\dot{y}(0) = 0,1$ m/s – linia ciągła oraz dla $y(0) = 0,08$ m, $\dot{y}(0) = 0,1$ m/s – linia przerywana (wyniki dla danych: $c = 4000$ N/m, $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg, $m_3 = 2$ kg, $m_4 = 2$ kg, $m_5 = 3$ kg, $l = 0,5$ m, $h = 0,2$ m, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0,1$ m/s)	161

4.51	Porównanie wyników rozwiązań przy uwzględnieniu wstępnego napięcia sprężyny (linie ciągłe) i przy pominięciu wstępnego napięcia sprężyny (linia przerywana)	162
4.52	Rysunek do zadania 85	162
4.53	Rysunki do zadań 86 i 87	163
4.54	Rysunki do zadań 88 i 89	163
4.55	Rysunek do zadania 90 i 91.	164
5.1	Łyżwa – współrzędne kartezjańskie i współrzędne uogólnione	169
5.2	Łyżwa – współrzędne uogólnione i obciążenie	171
5.3	Zadane zmiany obciążenia w czasie: siła F (linia ciągła – kolor zielony), kąt β (linia przerywana – kolor brązowy)	173
5.4	Przebiegi czasowe rozwiązania: x_0 – (kolor zielony), y_0 – (kolor niebieski), φ – (kolor czarny) i tor środka łyżwy (punktu O) .	173
5.5	Model kuli – osie: xyz sztywno związane z kulą i XYZ związane ze środkiem kuli, ale poruszające się ruchem postępowym	174
5.6	Przebieg zmian współrzędnych ψ , θ i φ dla danych z tabelicy 5.1	177
5.7	Przebieg zmian prędkości uogólnionych ψ , $\dot{\theta}$ i $\dot{\varphi}$ dla danych z tabelicy 5.1	178
5.8	Łyżwa – współrzędne uogólnione i siła zewnętrzna $F(t)$. . .	181
5.9	Tor środka łyżwy (punktu O)	183
5.10	Łyżwa: \vec{v}_s – wektor prędkości środka geometrycznego łyżwy (punktu S), współrzędne uogólnione ($q_1 = x_s$, $q_2 = y_s$, $q_3 = \varphi$) i środek masy łyżwy (C)	186
5.11	Wyniki rozwiązania: tor środka pręta (punktu S) oraz położenia pręta w wybranych chwilach	189
5.12	Krażek – współrzędne uogólnione (x , y , ψ , θ , φ) oraz quasi-prędkości (w_1 , w_2 , w_3)	193
5.13	Krażek toczący się bez poślizgu po płaszczyźnie – ślad krążka (linia ciągła) i tor środka krążka (linia przerywana)	194
5.14	Model torusa – tor środka masy i ślad punktu styku na płaszczyźnie XY	196
5.15	Wynik rozwiązania dla zadania 99 (tor środka kuli)	197
5.16	Model sań Czaplygina – współrzędne uogólnione i kierunek wektora prędkości środka masy (C)	197
5.17	Modele układu połączonych sań Czaplygina: a) brak połączenia, b) sztywny pręt, c) sprężyna, d) nierozciągliwa lina . . .	198

5.18	Modele wózka: a) dwukołowego, b) czterokołowego, c) sześciokołowego	199
5.19	Model wózka dwukołowego z podpórką – wektory prędkości kątowych ciał	200
5.20	Model wózka dwukołowego z podpórką – osie obrotu $x_{11}, z_{11}, x_{21}, z_{21}$ oraz osie z_{10}, z_{20} przechodzące przez środki kół	201
5.21	Położenie i prędkości kuli na obracającej się tarczy	202
A.1	Mechanizm korbowy poruszający się ze znaną prędkością punktu A	205
A.2	Mechanizm korbowy – określenie wektora \vec{v}_B metodą bieguna	205
A.3	Mechanizm korbowy – określenie położenia środka chwilowego obrotu S dla korbowodu	207
A.4	Mechanizm korbowy – określenie rzutów prędkości punktów A i B (należących do korbowodu) na oś x	208
B.1	Oznaczenia: a) kąty α, β i γ określające orientację prostej l_B (i wektora prędkości kątowej ciała $\vec{\omega}$) względem osi $x'y'z'$ (równoległych do nieruchomych osi xyz), b) wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i jego rzuty na osie $\xi\eta\zeta$ – układu związanego z ciałem oraz prędkość środka masy ciała \vec{v}_C i jej rzuty na osie xyz	210
B.2	Ruch kulisty ciała ($\vec{v}_O = \vec{v}_B = \vec{0}$) – wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i jego rzuty na osie $B\xi\eta\zeta$ układu sztywno związanego z ciałem	212
B.3	Ruch płaski ciała w płaszczyźnie równoległej do xy (oś ζ równoległa do z) – prędkość środka masy \vec{v}_C ($v_{C\xi} = v_{C\eta} = \dot{z}_C = 0$) i wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ ciała ($\omega_\xi = \omega_\eta = 0$)	213
B.4	Ruch obrotowy ciała wokół nieruchomej osi ζ (oś ζ pokrywa się z osią z) przechodzącej przez punkt B	214
C.1	Pręt podparty przegubowo utrzymywany w położeniu równowagi przez linę z zawieszonym obciążnikiem o ciężarze P	218
C.2	Przebieg zmian energii potencjalnej układu w funkcji kąta θ (theta)	219
C.3	Przebieg zmian pierwszej (a) i drugiej (b) pochodnej energii potencjalnej układu w funkcji kąta θ (theta)	219
C.4	Przebieg zmian energii potencjalnej układu w zależności od kąta φ (phi) dla danych $m = 0,01$ kg, $g = 9,81$ m/s ² , $m_1 = 0,05$ kg, $m_2 = 0,03$ kg, $r_2 = 0,16$ m, $r = 0,07$ m, $L = 0,2$ m	221

C.5 Przebieg zmian pierwszej pochodnej energii potencjalnej układu w zależności od kąta φ (**phi**) – dane jak wyżej 221

C.6 Przebiegi rozwiązania – zmiany: a) kąta φ (**phi**), b) prędkości kątowej pręta $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (**omega**) 224

Spis tablic

4.1	Wyniki badania stateczności żurawia	124
4.2	Oznaczenia i wartości parametrów układu użyte w obliczeniach	137
4.3	Wartości parametrów układu otrzymane z obliczeń	139
5.1	Dane modelu, wartości początkowe współrzędnych i prędkości uogólnionych	177
5.2	Dane modelu, wartości początkowe współrzędnych i prędkości uogólnionych	195
5.3	Zadane wielkości dla sań	198
5.4	Wielkości zadane dla wózków	200
5.5	Dane charakteryzujące model połączonych kół	201

Indeks

- charakterystyki
 - kinematyczne, 184
- ciało
 - rzeczywiste, 37
 - szttywne, 37, 48, 100, 103
- energia
 - kinetyczna, 149, 151–153, 159, 209, 211, 212, 214
 - potencjalna, 115, 116, 118–120, 122, 127, 129–133, 135, 136, 143, 153, 155, 156, 158
- funkcja Hamiltona, 20
- funkcja Lagrange’a, 19, 150
- hamiltonian, 20
- kinematyka
 - ciała sztywnego, 203
- lagranżjan, 19, 150
- mnożniki Lagrange’a, 76, 82, 84, 91, 92, 167, 168, 172, 175, 176
- moment
 - główny sił, 101
- pęd
 - punktu, 15
 - uogólniony, 20, 21
- parametry kinematyczne, 167, 184, 186, 188
- położenie
 - ciała, 13
 - ciała sztywnego, 96
 - punktu, 13, 24, 28, 29
- prędkość
 - punktu, 15, 203, 204, 206, 208
- prędkości
 - możliwe, 38
 - rzeczywiste, 38
- praca
 - elementarna, 46
 - przygotowana, 100
- przemieszczenia
 - możliwe, 38–41, 46
 - przygotowane, 37, 39, 41, 42, 46, 47
 - rzeczywiste, 38
- przyspieszenie
 - punktu, 15, 203
- quasi-prędkości, 190, 192
- quasi-współrzędne, 190
- równania
 - Boltzmann-Hamela, 190–192, 215
 - Hamiltona, 13
 - Lagrange’a, 13
 - Lagrange’a drugiego rodzaju, 148, 150–152, 155, 158, 162, 165, 167, 168, 172, 182

- Lagrange'a pierwszego rodzaju,
76, 77, 81–83, 90, 165
- Maggi'ego, 167, 184, 186–188,
215
- równanie d'Alemberta – Lagrange'a,
19, 150, 166, 179, 180, 182,
184
- równowaga
stała, 118
- siły
aktywne, 43
bezwładności, 71, 148
reakcji, 82
uogólnione, 19, 54, 98, 99, 102,
115, 116, 138, 139, 150, 152,
171, 182, 185, 187, 188
- układ
holonomiczny, 19, 29, 34, 37, 94,
148, 150, 151
nieholonomiczny, 19, 34, 165,
166, 170, 184, 185
- układy współrzędnych, 11
- wektor
główny sił, 101
- więzy, 23
- więzy
całkowalne, 33, 34
dwustronne, 23–25, 27
geometryczne, 28, 29, 31, 32, 34,
37, 39, 45, 47, 75, 76, 90, 93,
94, 101, 165, 169, 170
idealne, 37, 43, 44, 47–49, 56, 60,
68, 116, 148, 151
jednostronne, 23, 26, 27
katastatyczne, 30
kinematyczne, 28, 30, 34, 37, 75,
76, 86, 165, 166, 168–170,
172, 180–185, 189, 193
reonomiczne, 34–36
skleronomiczne, 34, 36, 37, 45,
47, 90, 101, 170
- współrzędne
kartezjańskie prostokątne, 11,
13, 25, 30, 41, 56, 68, 77, 93,
95, 96, 98, 165, 169
krzywoliniowe, 11
uogólnione, 11, 19, 93–99, 102,
110, 115, 117, 122, 124, 127,
142, 148, 151, 152, 154, 165,
166, 168–171, 181, 185, 186
- współrzędne krzywoliniowe
biegunowe, 50
- zasada
d'Alemberta, 71

ISBN 978-83-7283-753-0